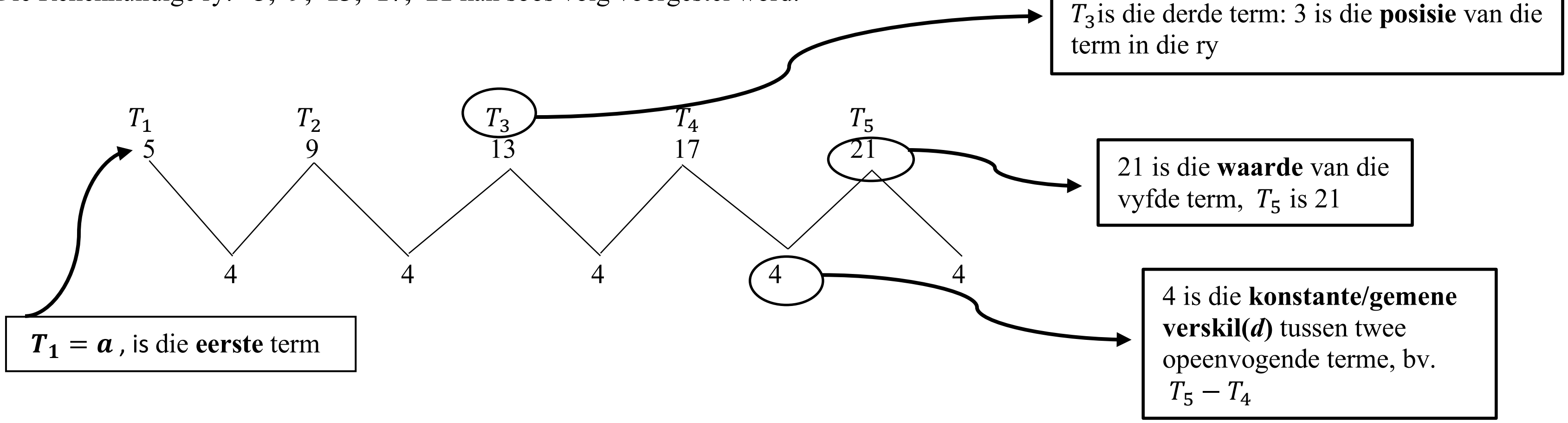
VAK EN GRAAD	Wiskunde Graad 12	
KWARTAAL 1	Week 1	
ONDERWERP	Rye en Reekse	
DOEL VAN LES	• Herkening van Rekenkundige rye • Bepaal die Algemene Rekenkundige rye • Bepaal die som van 'n rekenkundige ry • Beantwoording van vrae oor rekenkundige rye soos bepaling van die aantal terme in 'n ry • Sigma notasie	
BRONNE	***Papier bronne***	***Digitale bronne***
	Hoofstuk in handboek	https://www.youtube.com/watch?v=WE3S6OAwc-s
VAK EN GRAAD	In die vorige grade was ons voorgestel aan getalpatrone wat 'n ry is van gatalle wat 'n spesifieke patroon vorm. 'n Voorbeeld van 'n **lineêre getal patroon (Rekenkundige ry)** is een waar daar 'n **konstante verskil tussen opeenvolgende terme** is. Met ander woorde **dieselfde getal** word opgetel of afgetrek vanaf die vorige term.	

'n **Ry is** 'n **geordende lys van getalle of voorwerpe.** 'n **Lineêre getalpatroon word ook** 'n **Rekenkundige Ry** genoem.

Die Rekenkundige ry: **5; 9; 13; 17; 21** kan soos volg voorgestel word.



'n **Rekenkundige Ry** is 'n ry waar die **konstante verskil tussen opeenvolgende terme dieselfde** is.

In die ry: **5; 9; 13; 17; 21; …**

$\boldsymbol{a} = $ **die eeste term** $= \boldsymbol{T_1}$

$\boldsymbol{d} = $ **konstante verskil**

$\boldsymbol{d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2}$

$\boldsymbol{n} = $ **aantal terme**

Let op dat $\boldsymbol{a = 5}$ en $\boldsymbol{d = 4}$

$\boldsymbol{T_1} = 5 = \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{T_2} = 9 = 5 + 4 = \boldsymbol{a + d}$

$\boldsymbol{T_3} = 13 = 5 + 2(4) = \boldsymbol{a + 2d}$

$\boldsymbol{T_4} = 17 = 5 + 3(4) = \boldsymbol{a + 3d}$

$\boldsymbol{T_n} = 5 + (n-1)(4) = \boldsymbol{a + (n-1)d}$

Die Algemene **Term** $\boldsymbol{T_n}$

Word gegee deur

$$\boldsymbol{T_n = a + (n-1)d}$$

<u>Voorbeeld 1:</u>

Gegee die ry : 2; 5; 8; …

a) Bepaal die algemene term van die ry.

b) Gebruik die algemene term en bepaal die 40^{ste} term.

c) Watter term in die ry sal gelyk wees aan 2012.

<u>Oplossing</u>: **konstante verskil:** $\boldsymbol{d = T_2 - T_1 = 5 - 2 = 3}$

$\boldsymbol{a = T_1 = 2}$

a)
$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ &= 2 + (n-1)3 \\ &= 2 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

$\therefore T_n = 3n - 1$

b)
$$\begin{aligned} T_n &= 3n - 1 \\ \therefore T_{40} &= 3(40) - 1 \\ T_{40} &= 119 \end{aligned}$$

Posisie van die term is 40. Daarom is, $n = 40$

c)
$$\begin{aligned} T_n &= 2012 \\ \therefore T_n &= 3n - 1 = 2012 \\ 3n &= 2012 + 1 \\ 3n &= 2013 \\ n &= 671 \end{aligned}$$

Waarde van een van die terms is 2012. Daarom is T_n, 2012, want ons weet nie, die posisie van 2012 nie

$\therefore 671^{\text{ste}}$ term van die patroon is gelyk aan 2012

<table>
<tr>
<td><u>Voorbeeld 2:</u>

Bepaal die aantal terme in die rekenkundige ry
-2; -6; -10; … ; -150</td>
<td><u>Oplossing:</u>
$\boldsymbol{d} = -6 - (-2) = \boldsymbol{-4}$
$T_n = a + (n-1)d$
$T_n = -2 + (n-1)(-4)$
$T_n = -4n + 2$
$T_n = -4n + 2 = \boldsymbol{-150}$
$\therefore -4n = -152$
$\therefore n = 38$
Daar is 38 terme</td>
<td><u>Voorbeeld 3:</u>

Bepaal die eerste drie terme van die rekenkundige ry met die konstante verskil van 10 en die vierde term van 39.</td>
<td><u>Oplossing:</u>
konstante verskil: $\boldsymbol{d = 10}$
$\boldsymbol{T_4 = 39}$
$T_n = a + (n-1)d$
$T_4 = a + (4-1)d$
$39 = a + 3d$
$39 = a + 3(10)$
$9 = a$
Dus is die ry 9; 19; 29</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Voorbeeld 4:</u>

In die rekenkundige ry is die 2^{de} term gelyk aan 9 en die 5^{de} term is gelyk aan 21. Bereken

a) Die eertse drie terme van die ry.

b) Die 60^{ste} term</td>
<td><u>Oplossing:</u>
$T_2 = a + d = 9$ (1) 2^{de} term
$T_5 = a + 4d = 21$ (2) 5^{de} term
$3d = 12$ (2) – (1)
$\boldsymbol{d = 4}$
$\therefore T_2 = a + d = 9$
$a + 4 = 9$
$\boldsymbol{a = 5}$
Die eerste drie terme is 5; 9; 13;

$T_{60} = a + 59d = 5 + 59(4) = 241$

Dus is die 60^{ste} term 241.</td>
<td><u>Voorbeeld 5:</u>

$2p - 3;\ 3p - 1;\ 5p - 2$ die eerste drie terme van die rekenkundige ry.

a) Bepaal die waarde van p.

b) Die eertse drie terme van die ry.

c) Bepaal die term wat gelyk is aan 2013</td>
<td><u>Oplossing:</u>
$\boldsymbol{d} = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$
$(3p-1) - (2p-3) = (5p-2) - (3p-1)$
$3p - 1 - 2p + 3 = 5p - 2 - 3p + 1$
$p + 2 = 2p - 1$
$\boldsymbol{p = 3}$

b) Vervang $p = 3$ in die ry en die eerste drie term is 3; 8; 13

c) $T_n = a + (n-1)d = 2013$
$3 + (n-1)(5) = 2013$
$3 + 5n - 5 = 2013$
$5n = 2015$
$n = 403$</td>
</tr>
<tr>
<td>KAN JY?</td>
<td colspan="2">1) Gegee die volgende ry: 3; 8; 13; 18; …
Bereken:
a) Die algemene term
b) Die 20ste term
c) Watter term van die ry is gelyk aan 223

2) In 'n rekenkundige ry is $T_3 = -2$ en $T_8 = 23$.
Bepaal die eerste term en die konstante verskil.

3) Bepaal die aantal terme in die rekenkundige ry
$-5;\ -11;\ -17;\ \dots;\ -491$
4) Die eerste drie terme van 'n rekenkundige ry is
$x - 8;\ x;\ 2x - 5$. Bepaal
a) die waarde van x.
b) Die algemene term.
c) Die waarde van die 115^{ste} term.</td>
<td>Antwoorde:

1) a) $T_n = 5n - 2$
b) 98
c) $n = 45$

2) $d = 5$
$a = -12$
3) 82

4) a) 13

b) $T_n = 8n - 3$

c) 917</td>
</tr>
</table>

REEKS: 'n Reeks word gevorm wanneer die **terme van 'n ry opgetel word.**

2; 5; 8; 11; 14; **Rekenkundige Ry**

2 + 5 + 8 + 11 + 14 **Rekenkundige Reeks**

Die **Som van 'n ry** word voorgestel as $\boldsymbol{S_n}$ of die Griekse simbool $\sum$

In die reeks 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + ...

$$\boldsymbol{S_1} = T_1 = 2$$
$$\boldsymbol{S_2} = T_1 + T_2 = \quad \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{T_2} = 2 + 5 = 7$$
$$\boldsymbol{S_3} = T_1 + T_2 + T_3 = \quad \boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{T_3} = 2 + 5 + 8 = 15$$
$$\boldsymbol{S_4} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \boldsymbol{S_3} + \boldsymbol{T_4} = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$$

.

.

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{S_{n-1}} + \boldsymbol{T_n} \qquad \boxed{\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{S_{n-1}} + \boldsymbol{T_n}}$$

Stel $\boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{l}$ die laaste term

Dan is:
$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (l-d) + l$$
$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \ldots + (a+d) + a$$
$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots + (a+l) + (a+l)$$
$$2S_n = n(a+l)$$
$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{l})$$
$$S_n = \frac{a}{2}(a + \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{d}) = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{2a} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{d}]$$

Dus word die **som van die eerste $\boldsymbol{n}$ terme van 'n rekenkundige ry** gegee deur die formule:

$$\boxed{\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{2a} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{d}] \quad \textbf{or} \quad \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}]\ \textbf{; waar } \boldsymbol{l}\textbf{, die laaste term is.}}$$

Voorbeeld 6:

Beskou die rekenkundige ry $(-1)+\left(\frac{-3}{2}\right)+(-2)+\cdots+(-16)$.

a) Bepaal die aantal terme in die ry.

Oplossing:

$$T_n = a+(n-1)d$$
$$T_n = -1+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -16$$
$$\therefore\ -1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2} = -16$$
$$\therefore\ -\frac{1}{2}n = -16+\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ n = 31$$

b) Bereken die som van die ry.

Oplossing:

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$$
$$\therefore S_{31} = \frac{31}{2}[-1+(-16)]$$
$$\therefore\ S_{31} = -\frac{527}{2}$$

Voorbeeld 7:

Die som van hoeveel terme in die ry $1+4+7+\cdots$ is gelyk aan **145.**

Oplossing:

$a=1;\ d=3;\ n=?;\ S_n=145$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$145 = \frac{n}{2}[2(1)+(n-1)3]$$
$$290 = n(2+3n-3)$$
$$290 = n(3n-1)$$
$$0 = 3n^2-n-290$$
$$0 = (3n+29)(n-10)$$
$$n = -\frac{29}{3} \quad \text{of} \quad n=10$$
$$\therefore n = 10\ ;\ n \in N$$

Voorbeeld 8:

Beskou die rekenkundige ry $-4-1+2+\cdots$

Bereken die kleinste waarde van n waarvoor $S_n > 300$

Oplossing:

$a=-4;\ d=3;\ n=?;$ laat $S_n = 300$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 300$$
$$\frac{n}{2}[2(-4)+(n-1)3] = 300$$
$$\therefore\ n[3n-11] = 600$$
$$\therefore\ 3n^2-11n-600 = 0$$
$$\therefore\ n = \frac{-(11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(3)(-600)}}{2(3)}$$
$$\therefore\ n = 16{,}09 \quad \text{of} \quad n = -12{,}43$$

$\therefore$ Die kleinste moontlike waarde van n is 17.

SIGMA NOTASIE: Die Griekse letter $\sum$ **Sigma beteken die som van.**
It word gebruik om die som van 'n stel opeenvolgende terme van 'n ry/reeks aan te dui. In hierdie notasie moet ons die posisie van die eerste en laaste term van die reeks aandui wat opgetel word.

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n = S_n$$

Dit word gelees as, "die sigma of som van T_k, van $k = 1$ tot $k = n$.

Dit beteken, neem die som van die terme van 'n rye/reeks vanaf die eerste term tot die $n'th$ term van die ry/reeks.

Of dit beteken, die som van die eerste n terme van die ry/reeks.

n is die getal of posisie van die laaste term van die ry/reeks waarvan die som bepaal word. Kom ons verwys daarna as **laaste / boonste**

$$\sum_{k=m}^{n} T_k$$

Algemene term van die ry/reeks in terme van k

m is die nommer van die posisie van die eerste term van die ry/reeks waarvan die som bepaal word. Kom ons verwys daarna as eerste/***onderste waarde***

n, die aantal terme wat bygevoeg word:

$$n = boonste - onderste\ waarde + 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \sum_{k=1}^{n}[a + (k-1)d]$$

<u>Voorbeeld 9:</u> Bepaal die waarde van:

$$\sum_{n=1}^{5}(3n + 2)$$

<u>Oplossing:</u>
Metode 1

$$S_n = \sum_{n=1}^{5}(3n + 2)$$

$$\begin{aligned} S_5 &= (3.1 + 2) + (3.2 + 2) + (3.3 + 2) + (3.4 + 2) + (3.5 + 2) \\ &= 5 + 8 + 11 + 14 + 17 \\ S_5 &= 55 \end{aligned}$$

<u>Voorbeeld 10</u>: Bepaal die waarde van:

$$\sum_{k=4}^{7} 2k$$

<u>Oplossing</u>:
Metode 1

$$\sum_{k=4}^{7} 2k$$

$$\begin{aligned} S_4 &= 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7) \\ &= 8 + 10 + 12 + 14 \\ S_4 &= 44 \end{aligned}$$

Metode 2:

$$\sum_{n=1}^{5}(3n+2)$$

Vervang, n met 1, 2 & 3

Dit is om die eerste drie terme te bepaal.

$(3.1+2)+(3.2+2)+(3.3+2)+\cdots.$

$=5+8+11+\cdots \dots..$

$8-5=3$ and $11-8=3$

$\therefore$ is dit 'n Rekenkundige reeks.

$\therefore \quad S_5=\frac{5}{2}[2a+4d]$

$\therefore \quad S_5=\frac{5}{2}[2(5)+4(3)]$

$\therefore \quad S_5=55$

Aantal terme is 5

Of

n =Boonste– onderste + 1=

(5-1+1)=5

Metode 2:

$$\sum_{k=4}^{7}\boldsymbol{2k}$$

Vervang, n met 1, 2 & 3

Dit is om die eerste drie terme te bepaal.

$2(4)+2(5)+2(6)+\cdots$

$=8+10+12+\cdots \dots..$

$10-8=2$ en $12-10=2$

$\therefore$ is dit 'n Rekenkundige

$\therefore \quad S_4=\frac{4}{2}[2a+3d]$

$\therefore \quad S_4=2[2(8)+3(2)]$

$\therefore \quad S_4=44$

Aantal terme is:

Boonste– onderste +1

= $(7-4+1)=4$

Let op die twee metodes hierbo. As die som van 'n stel terme van 'n ry / reeks vir baie terme bepaal word, sê byvoorbeeld dit is vir 'n honderd terme, dan is dit meer sinvol om die tweede metode te gebruik. Jy sal dan die som van die honderd terme kan bepaal sonder om elk van die honderd terme te bereken en dan op te tel.

<u>Voorbeeld 11:</u> Skryf die volgende reeks in sigma-notasie: $5+8+11+14+17$

<u>Oplossing:</u>

1. Bereken eers die algemene term vir die reeks waar $\boldsymbol{a=5}$ **and** $\boldsymbol{d=3}$.

Vandaar $T_n=a+(n-1)d$

$T_n=5+(n-1)3$

$T_n=5+3n-3$ Type equation here.

$T_n=3n+2$

$$\sum_{n=\cdots}^{\cdots}(3n+2)$$

1) Skryf die formule nou in sigma-notasie

Onderste waarde is die eerste term wat gelyk is aan 5:

$3n+2=\mathbf{5}$

$3n=3$

$n=1$

boonstewaarde is die laaste term wat gelyk is aan 17:

$3n+2=\mathbf{17}$

$3n=15$

$n=5$

2)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{5}(3n+2)}$$

<table>
<tr><td>KAN JY?</td><td>1) Bereken $5 + 12 + 19 + \cdots + 54$

2) Die som van hoeveel terme in die rekenkundige ry $3 + 7 + 11 + \cdots$ is gelyk aan 210?

3) Bereken die waarde van volgende

$$\sum_{r=0}^{10}(2r + 5)$$

4) Skryf die volgende in sigma notasie $7 + 10 + 13 + \cdots + 25$</td><td><u>Anwoorde:</u>
1) 236

2) 10

3) 165

4)
$$\sum_{n=0}^{6}(7 + 3n)$$</td></tr>
<tr><td>AKTIWITEITE/
ASSESSERING</td><td colspan="2">

Mind Action Series		Via Afrika		Wiskunde vir die Klaskamer	
Oefening	Bladsy	Oefening	Bladsy	Oefening	Bladsy
2. 4.	5 12	1. 3.	12 22	1.3 1.5 1.7	7 14 23

</td></tr>
<tr><td>KONSOLIDASIE</td><td colspan="2">

Rekenkundige Ry

$T_1,\ T_2\ ,\ T_3,\ T_4, \ldots\ T_n$

$T_n = a + (n-1)d$ waar $\boldsymbol{a} = T_1$ en $\boldsymbol{d} = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$

Rekenkundige Reeks

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_n = S_n$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ of $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

Sigma Notasie

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} T_k = S_n}$$

</td></tr>
</table>