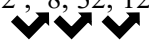




VAK EN GRAAD	Wiskunde Graad 12	
KWARTAAL 1	Week 2	
ONDERWERP	Meetkundige Rye en Reekse	
DOEL VAN LES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Herken 'n meetkundige ry</li> <li>• Bepaal die algemene term van 'n meetkundige ry</li> <li>• Gebruik die algemene termformule om die posisie van 'n term te bepaal en 'n term in 'n gegewe posisie te vind</li> <li>• Bepaal die som van 'n meetkundige reeks</li> <li>• Sigma notasie</li> </ul>	
BRONNE	<i>Papier bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>
	Handboek en Mind the Gap, Bladsy 42	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=BFgNEy8rAMU">https://www.youtube.com/watch?v=BFgNEy8rAMU</a>

**INLEIDING**

Kom ons ondersoek die volgende getalpatrone.

1.  $2; 8; 32; 128; \dots$   
  
 $\times 4 \quad \times 4 \quad \times 4$



**Neem kennis:**  $a$  is die eerste term en  $r$  is die konstante verhouding.

Dus:

$$a = 2 \quad \text{en} \quad r = 4$$

Skryf die waarde van  $a$  en  $r$  neer in elk van die volgende gevalle.

2.  $1; -2; 4; -8; \dots$

3.  $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \dots$

4.  $243; 81; 27; \dots$

Jy sal saamstem dat elke term met 'n sekere konstante vermenigvuldig word. Hierdie waarde staan bekend as die gemeenskaplike verhouding. ( $r$ )

Hierdie konstante word bereken deur:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_{n+1}}{T_n}$$

**Oplossings**

2.  $a = 1; r = -2$

3.  $a = 2; r = -\frac{1}{2}$

4.  $a = 243; r = \frac{1}{3}$

## KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Kom ons ondersoek dit verder:

1. 2; 8; 32; 128; ...

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 = a \\ T_2 &= 2 \times 4 = ar \\ T_3 &= 2 \times 4 \times 4 = ar^2 \\ T_4 &= 2 \times 4 \times 4 \times 4 = ar^3 \\ T_5 &= \phantom{2 \times 4 \times 4 \times 4} = ar^4 \\ \therefore T_{10} &= ar^9 \end{aligned}$$

Hierdie formule kan gebruik word om enige term in hierdie tipe rye te bepaal.



$$T_n = ar^{n-1} \quad T_n \text{ is die algemene term}$$

Let op die patroon

...

Die nommer van die term en die eksponent van  $r$

Ons gaan hierdie reël gebruik om die ALGEMENE TERM van 'n meetkundige ry te bepaal.

**Voorbeeld 1.** Bepaal die algemene term van die ry.

2; 8; 32; 128; ...

**Oplossing:**

$$\begin{aligned} : T_n &= ar^{n-1} \\ T_n &= 2(4^{n-1}) \\ T_n &= 2(2^2)^{n-1} \\ T_n &= 2(2^{2n-2}) \\ T_n &= 2^{2n-1} \end{aligned}$$

**Wenk:** Toets jou reël:

bv.  $T_4 = 2^{2(4)-1} = 2^7 = 128$

Let op dat dit **NIE** gelyk is aan

$$T_n = 2(4^{n-1}) \neq 8^{n-1}$$

Eksponensiële wette moet toegepas word om dit te vereenvoudig.

### Metode

1. Bepaal die waarde van  $a$ .  
**[Eertse term]**
2. Bepaal die waarde van  $r$ .  
**[Gemene verhouding]**
3. Vervang in die  $T_n$  formule
4. Vereenvoudig

### Informasie wat jy benodig

$$\begin{aligned} a &= 2; \\ r &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{2} = 4 \\ T_n &=? \end{aligned}$$

### KAN JY?

1. Bepaal die algemene term van elk van die volgende rye:

- (a) 4; 12; 36; ...
- (b) 1; -2; 4; -8; ...
- (c) 2; 6; 18; ...
- (d) 128; 64; 32; ...
- (e)  $\frac{2}{3}$ ; -2; 6; ...
- (f) 0,25; 0,5; 1; ...

### Antwoord

- (a)  $T_n = 4(3)^{n-1}$
- (b)  $T_n = (-2)^{n-1}$
- (c)  $T_n = 2(3)^{n-1}$
- (d)  $T_n = 2^{8-n}$
- (e)  $T_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$
- (f)  $T_n = (2)^{n-3}$

**Voorbeeld 2:** Bepaal die 7<sup>de</sup> term van die ry

$$24; 6; \frac{3}{2}; \frac{3}{8}; \dots$$

**Oplossing:**

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_7 = 24 \left(\frac{1}{4}\right)^{7-1}$$

$$T_7 = 24 \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$T_7 = \frac{3}{512}$$



**Gebruik jou sakrekenaar vir die finale antwoord!**



**Rof werk**

$$a = 24$$

$$r = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$n = 7$$

$$T_n = ?$$

Vervang

**KAN JY?**

2. In die volgende rye bepaal:

(a) 11<sup>de</sup> term van  $-3; 6; -12; \dots$

(b) 9<sup>de</sup> term of  $2; 8; 32; \dots$

(c) 25<sup>ste</sup> term of  $a; ab; ab^2; \dots$

**Antwoord:**

(a)  $T_n = -3072$

(b)  $T_n = 131\,072$

(c)  $T_n = ab^{24}$

**Voorbeeld 3:**

Watter term in die ry:

$$12; 4; \frac{4}{3} \text{ is gelyk aan } \frac{4}{243}?$$

**Oplossing:**

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{4}{243} = 12 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore n - 1 = 6$$

$$\therefore n = 7$$



**Rof werk op die RK  
van bladsy**

$$a = 12;$$

$$r = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$n = ?$$

$$T_n = \frac{4}{243}$$

Ek moet vir  $n$  bereken

Vervang en vereenvoudig.

3. Watter term van die meetkundige ry  
 $2; 6; 18; \dots$  is gelyk aan 4374?

4. Bepaal die aantal terme in die ry  
 $2; 4; 8; \dots; 1024$ .

5. Hoeveel terme is daar in die ry  
 $5x; 20x; 80x; \dots; 20480x$ ?

**Antwoord:**

3.  $n = 8$

4.  $n = 10$

5.  $n = 7$

**Voorbeeld 4:**

Bepaal die eerste 4 terme van 'n meetkundige ry as die 2<sup>de</sup> term 10 en die 9<sup>de</sup> term  $\frac{5}{64}$  is .

$$T_2: ar = 10 \quad \text{Vergelyking 1}$$

$$T_9: ar^8 = \frac{5}{64} \quad \text{Vergelyking 2}$$

$$\frac{\text{Verg 2}}{\text{Verg 1}}: \frac{ar^8}{ar} = \frac{5}{64} \div 10$$

$$r^7 = \frac{5}{64} \times \frac{1}{10}$$

$$r^7 = \frac{5}{640}$$

$$r = \sqrt[7]{\frac{5}{640}} = \frac{1}{2}$$

Vervang in Vergelyking 1:

$$a\left(\frac{1}{2}\right) = 10$$

$$a = 10 \div \frac{1}{2}$$

$$a = 20$$

Die drie terme is:

$$20; 10; 5; \frac{5}{2}$$

Sien die bevestiging van term 2.

**Gegewe informasie**

$$T_2 = 10$$

$$T_9 = \frac{5}{64}$$

Jy benodig  $a$  en  $r$  om die eerste 3 terme neer te skryf.

**KAN JY?**

6. Bepaal die meetkundige ry waarvan die 4<sup>de</sup> term 24 en die 7<sup>de</sup> term 192 is.

**Antwoord:**

6.  $r = 2$ ;  $a = 3$   
3; 6; 12; 24; ....

**Voorbeeld 5.** Die eerste 3 terme van die meetkundige ry word gegee as:

$$x - 4; x; x + 12$$

- (a) Bepaal die waarde van  $x$ .  
(b) Bepaal die waarde van die eerste 3 terme  
(b) Bepaal die 10<sup>de</sup> term.

**Oplossing:**

(a)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad [r =]$$

$$\frac{x}{x - 4} = \frac{x + 12}{x}$$

$$x^2 = (x - 4)(x + 12)$$

$$x^2 = x^2 + 8x - 48$$

$$8x - 48 = 0$$

$$8x = 48$$

$$x = 6$$

(b) Die terme is:

$$\begin{aligned} x - 4; x; x + 12 \\ = 6 - 4; 6; 6 + 12 \\ = 2; 6; 18 \dots \end{aligned}$$

(c)  $T_n = ar^{n-1}$   
 $T_{10} = 2(3)^9$   
 $= 3\,9366$



Ons benodig 'n vergelyking om  $x$  op te los.

Dus benodig ons twee dinge wat gelyk is aan mekaar.

In hierdie geval, is die **verhouding  $r$**  gelyk.

**KAN JY**

7.  $x - 4; x + 2; 3x + 1; \dots$  is die eerste drie terme van 'n meetkundige ry. Bepaal die ry as  $x$  positief is.
8.  $t + 1; 1 - t; 1 - 5t; \dots$  is die eerste drie terme van 'n meetkundige ry.
- (a) Bepaal die numeriese waarde van  $t$  en  $t \neq 0$ .  
(b) Bepaal die ry.  
(c) Bepaal die 10<sup>de</sup> term.  
(d) Watter term is gelyk aan  $10\frac{2}{3}$ ?

**Antwoorde"**

7. 4; 10; 25; ...

8.

(a)  $t = -\frac{1}{3}$

(b)  $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}$

(c)  $T_{10} = \frac{1024}{3}$

(d)  $n = 5$

## DIE SOM VAN 'N REEKS

Hierdie keer gaan ons die som van 'n meetkundige reeks bepaal.

Kom ons kyk of ons 'n maklike manier kan vind om die volgende reekse te doen.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= 2 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Hierdie is 'n maklike voorbeeld. Die som is 31. Maar wat as daar 10 of meer terme is in die reeks?

Kom ons bestudeer die reeks om 'n patroon te soek.

$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \quad (1)$$

$$2S_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \quad (2)$$

$$(1) - (2): \quad S_5 - 2S_5 = 1 - 32$$

$$-S_5 = -31$$

$$S_5 = 31$$

Vermenigvuldig  $r$  met vergelyking (1)

Ons kan dieselfde doen in algemene terme [*Jy moet dit ken vir eksamen doeleindes*]

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$rS_n - S_n = ar^n - a$$

$$S_n(r - 1) = a(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$



$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ons gaan nou die formule gebruik om die som van 'n meetkundige reeks te bepaal.

### Voorbeeld 1:

Bereken die som van:

$$1 + 2 + 4 + 8 \dots \text{tot 6 terme}$$



$$\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= 2 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{1(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_6 = 63$$

### Voorbeeld 2:

In die meetkundige reeks:

$$-243 - 81 - 27; \dots - \frac{1}{81}$$

(a) Bepaal die aantal terme.

(b) Wat is die som van die reeks?



$$\begin{aligned} a &= -243 \\ r &= \frac{-81}{-243} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= -\frac{1}{81} \\ n &= ? \end{aligned}$$

**Oplossing:**

(a)

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$-\frac{1}{81} = (-243) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{81} \div -\frac{243}{1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{81} \times -\frac{1}{243}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{19683}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$n = 9$$

(b)

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_9 = \frac{-243\left(\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$S_9 = -\frac{9841}{27}$$

Onthou om die  effektief te gebruik!

Jy kan die FACT [factore] funksie op die sakrekenaar gebruik om die priemfaktore te kry.

Vervang en brei uit

$$a = 12$$

$$r = -2$$

$$n = 15 - 3 + 1$$

$$n = 13$$

$$S_n = ?$$

**KAN JY?**

1. Bepaal:

(a) Die aantal terme in elke reeks.

(b) Die som van elke reeks.

(i)  $4 + 12 + 36 + \dots + 78732$ (ii)  $2 - 8 + 32 - \dots - 32768$ (iii)  $81 + 27 + 9 + \dots + \frac{1}{27}$ **Antwoord:**1. (i)  $n = 10$  ;  $S_n = 118\,096$ (ii)  $n = 8$  ;  $S_n = -26214$ (iii)  $n = 8$  ;  $S_n = \frac{3280}{27}$ **Voorbeeld 3:**

Brei uit and bereken:

$$\sum_{r=3}^{15} 3(-2)^{r-1}$$

**Oplossing:**

$$\sum_{r=3}^{15} 3(-2)^{r-1} = 3(-2)^2 + 3(-2)^3 + 3(-2)^4 + \dots + 3(-2)^{14}$$

$$= 12 - 24 + 48 + \dots + 49152$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{13} = \frac{12((-2)^{13} - 1)}{-2 - 1} = 32772$$

**KAN JY?**

2. Bepaal die som van die volgende:

$$(a) \sum_{n=1}^3 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$(b) \sum_{k=0}^4 (-3)^k$$

3. What is die waarde van  $m$  waarvoor

$$\sum_{k=1}^m 5(3)^{k-1} = 65?$$

**Antwoord:**

2.(a) 224

(b) -20

3.  $m = 3$

**AKTIWITEITE/ ASSESSERING**

	<b>Teksboek</b>	<b>Mind Action Series</b>	<b>Everything Maths Siyavula</b>	<b>Classroom Mathematics</b>	<b>Platinum</b>
<b>Meetkundige rye</b>		Oef: 4 Bl:9	Oef: 1.4- 1.61 Bl: 14-18	Oef: 1.4 Bl: 11	Oef:3-4 Bl: 8-9
<b>Som van Meetkundige reekse</b>		Oef: 5 Bl:23	Oef: 1.9 Bl 35	Oef: 1.6 Bl: 19	Oef: 6 Bl:14

**KONSOLIDASIE**

**Opsomming**

