



VAK EN GRAAD	Wiskunde Graad 12	
KWARTAAL 1	Week 3	
ONDERWERP	Rye en Reekse	
DOEL VAN LES	<ul style="list-style-type: none"> Som tot Oneindigheid Toepassing van rye en reekse 	
BRONNE	<i>Papier bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>
	Hoofstuk in handboek	https://www.youtube.com/watch?v=btve4T1R8Og https://www.youtube.com/watch?v=MTOKAA8rRA0

INLEIDING: Tot dusver het ons meetkundige reekse met 'n vaste aantal terme bekyk. Nou gaan ons na meetkundige reekse met 'n oneindige(∞) aantal terme kyk. Onthou die som vir 'n Meetkundige reeks:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ of } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Vergelyk die som van die volgende meetkundige reekse:

Voorbeeld 1

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

$$S_6 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$$

$$S_9 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1(1 - 2^9)}{1 - 2} = 511$$

$$S_{20} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = 1\,048\,575$$

Voorbeeld 2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$S_2 = 1\frac{1}{2} = 1,5$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} = 1,75$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8} = 1,875$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16} = 1,9375$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1\frac{31}{32} = 1,984375$$

$$S_9 = \frac{a\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - r} = \frac{1\left(1 - \frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = 1,996\dots \approx 2$$

Voorbeeld 1 vervolg

$$S_{20} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = 1\,048\,575$$

Soos n toeneem, sal S_n baie groot word.

Wiskundig sê ons dat:

as $n \rightarrow \infty$, dan sal $S_n \rightarrow \infty$.

\therefore Hierdie reeks divergeer.

(\rightarrow beteken streef of neig)

'n Meetkundige reeks sal divergeer (die som sal neig na 'n baie groot positiewe of negatiewe getal) as n neig na oneindigheid.

Voorbeeld 2 vervolg

$$S_9 = \frac{a \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - r} = \frac{1 \left(1 - \frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}} = 1,996 \dots \approx 2$$

Soos n toeneem, sal S_n neig na 2.

Wiskundig sê ons dat:

as $n \rightarrow \infty$, dan sal $S_n \rightarrow 2$.

\therefore Hierdie reeks konvergeer na 2.

'n Meetkundige reeks sal konvergeer (die som neig na 'n spesifieke waarde) as n neig na oneindigheid en die konstante verhouding is 'n getal tussen -1 en 1 .

Konvergerende meetkundige reeks

$$-1 < r < 1 \text{ en } r \neq 0$$

As $-1 < r < 1$, dan sal $r^n \rightarrow 0$ wanneer $n \rightarrow \infty$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Voorbeeld 4

Vir watter waardes van x sal die volgende reeks konvergeer?

$$(x + 1) + (x + 1)^2 + (x + 1)^3 + \dots$$

Oplossing: (van Voorbeeld 3)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\ \therefore a &= 2 \quad \text{and} \quad r = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 2 \div \frac{1}{2} = 2 \times \frac{2}{1} = 4$$

Voorbeeld 5.

Gegee die meetkundige reeks: $256 + p + 64 - 32 + \dots$

- Bepaal die waarde van p .
- Bereken die som van die eerste 8 terme van die reeks.
- Waarom bestaan die som tot oneindigheid vir die reeks?
- Bereken S_{∞} .

Oplossing:

$$a) \quad r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\frac{p}{256} = \frac{-32}{64}$$

$$p = -128$$

$$b) \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r = \frac{T_4}{T_3} = -\frac{1}{2}$$

$$S_8 = \frac{256 \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 170$$

Oplossing: (van Voorbeeld 4)

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)} = x + 1$$

Vir die reeks om te konvergeer is: $-1 < r < 1$

$$\therefore -1 < x + 1 < 1$$

$$\therefore -2 < x < 0$$

KAN JY:

1) Bereken die som tot oneindigheid vir

- $16 + 8 + 4 + \dots$
- $48 - 12 + 3 - \dots$

2) Bereken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (4)^{1-n}$$

3) Bereken die waarde van x waarvoor die volgende reeks konvergeer.

- $x + 2x^2 + 4x^3 + \dots$
- $(2x - 5) + (2x - 5)^2 + (2x - 5)^3 + \dots$

4) Beskou die oneindigende meetkundige reeks:

$$45 + 40,5 + 36,45 + \dots$$

- Bereken die waarde van die TWAALFDE term van die reeks (korrek tot twee desimale plekke).
- Verduidelik hoekom die reeks konvergeer.
- Bereken die som tot oneindigheid vir die reeks.

Oplossing: (van Voorbeeld 5)

c) $-1 < r < 1$

d) $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

$$S_{\infty} = \frac{256}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{512}{3}$$

Antwoorde: van Kan Jy?

1) a) 32

b) $\frac{192}{5}$

2) $\frac{8}{3}$

3) a) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

b) $2 < x < 3$

4) a) 14,12

b) $-1 < r < 1 ; (r \neq 0)$

c) 450

GEMENGDE TOEPASSINGS:

Voorbeeld 6

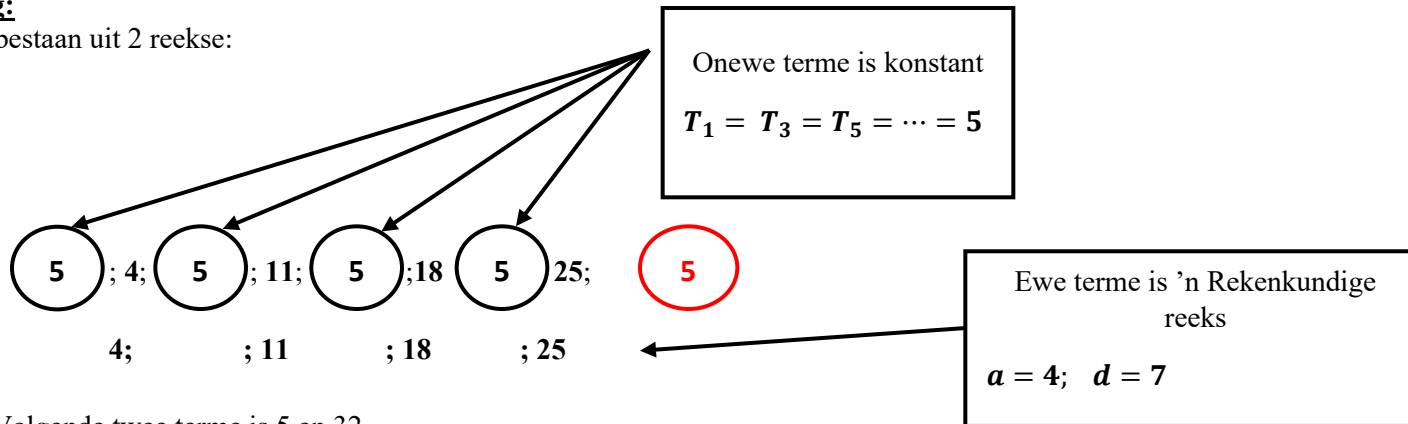
Beskou die volgende patroon van getalle: **5; 4; 5; 11; 5; 18; 5; 25; ...**

(a) Gegee dat die patroon verder gaan. Skryf neer die volgende twee terme in die patroon.

(b) Bepaal die som van die eerste 50 terme van die patroon.

Oplossing:

Patroon bestaan uit 2 reekse:



Volgende twee terme is 5 en 32

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } S_{50} &= S_{(25)onewe} + S_{(25)ewe} \\
 &= 25(5) + \frac{25}{2} [2(4) + (25 - 1)(7)] \\
 &= 125 + 2\,200 \\
 &= 2\,325
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 7

Thabo oefen vir die Spar marathon. Hy hardloop 4km in die eerste week en vermeerder daarna elke week sy afstand met 3km.

- Watter afstand hardloop hy gedurende die 11^{de} week?
- Gedurende watter week hardloop hy 25 km?
- Wat is die totale afstand wat hy oor die eerste 15 weke hardloop?
- Daar word gesê dat 'n atleet ten minste 900 km moet hardloop in voorbereiding vir die marathon. Hoeveel weke moet Thabo oefen voordat hy hierdie doelwit bereik het?

Oplossing:

Metode

- Lees die vraag en bepaal eerstens die patroon.
- Bepaal watter tipe patroon Rekenkundig of Meetkundig
- Gebruik nou die gepaste formule vir die ry.



Rekenkundig

$$a = 4 ; d = 3 ; n = 11 \quad T_{11} = ?$$

- (a) Reeks: 4; 7; 10; ...

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ T_n &= 4 + (n - 1)(3) = 3n + 1 \\ T_{11} &= 3(11) + 1 = 34 \\ \therefore \text{Hy hardloop } 34 \text{ km in week } 11. \end{aligned}$$

- (b) $T_n = 25$
 $3n + 1 = 25$
 $\therefore 3n = 24$
 $\therefore n = 8$
 \therefore Hy hardloop 25 km in die 8 ste week.

(c) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
 $S_{15} = \frac{15}{2}[2(4) + (15 - 1)(3)]$
 $\therefore S_{15} = 375$
 \therefore Hy hardloop 375 km in die eerste 15 weke.

(d) $S_n = 900$
 $\frac{n}{2}[2(4) + (n - 1)(3)] = 900$
 $\therefore n[8 + 3n - 3] = 1800$
 $\therefore 3n^2 + 5n - 1800 = 0$
 $\therefore n = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(-1800)}}{2(3)}$
 $\therefore n = 23,68$ of $n = -25,34$
 \therefore Hy moet 24 weke oefen.

Voorbeeld 8

Die prys van 'n nuwe motor verminder met 15 % per jaar. Die nuwe prys van die motor is R180 000.

- Skryf neer 'n patroon wat die waarde van die motor vir die eerste 3 jaar aantoon.
- Bepaal 'n formule wat die waarde(V) van die motor met sy ouderdom(n) verbind?
- Die waarde van die motor na 5 jaar.



$$\begin{aligned} a &= 180\,000 ; r = 0,085 \\ T_n &= V_n ? \end{aligned}$$

Oplossing:

(a)

Gedurende die jaar	1	2	3	4
Waarde van motor	180 000	180 000(0,085)	180 000(0,085) ²	180 000(0,085) ³

(b) $T_n = ar^{n-1}$

$$T_n = 180\,000(0,085)^{n-1}$$

$$V_n = 180\,000(0,085)^{n-1}$$

(c) Na 5 jaar d.w.s 6 jaar

$$V = 180\,000(0,085)^{n-1}$$

$$V_6 = 180\,000(0,085)^{6-1}$$

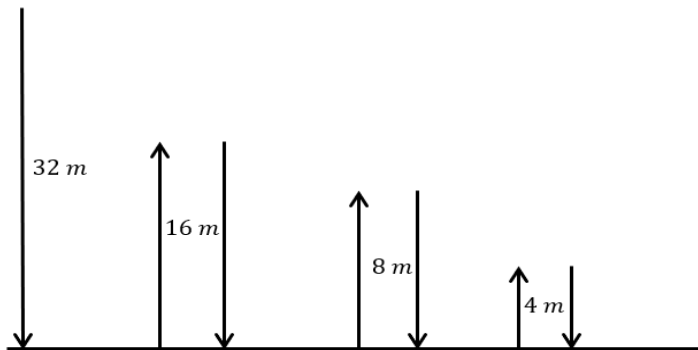
$$V_6 = R\,79\,866,96$$

Voorbeeld 9

'n Bal word vanaf 'n hoogte van 32 m laat val, waarna dit op en af begin hop. Met elke hop bereik die bal 'n hoogte van 50% van sy vorige hoogte. Indien hierdie beweging onbepaald voortgaan, wat is die totale vertikale afstand waardeur hierdie bal beweeg, vanaf die oomblik toe dit laat val is?



Oplossing: Teken 'n skets van die situasie waar moontlik.



Oneindigende meetkundige reeks

Oplossing:

Uit die skets skryf ons die reeks as

$$= 32 + 16 + 16 + 8 + 8 + 4 + 4 + \dots$$

$$= 32 + 2(16) + 2(8) + 2(4) + \dots$$

$$= 32 + 2(16 + 8 + 4 + \dots)$$

$$= 32 + 2\left(\frac{16}{1-0,5}\right)$$

$$= 32 + 2(32)$$

$$= 96$$

∴ Die totale vertikale afstand is 96m

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

KAN JY?

1. Thabo oefen vir die Spar fietstoer. Hy ry 'n afstand van 50 km in die eerste week en vermeerder daarna elke week sy afstand met 15 km.
- (a) Watter afstand lê hy af gedurende die 15^{de} week?
 - (b) Gedurende watter week het hy 185 km afgelê?
 - (c) Wat is die totale afstand wat hy aflê oor 'n tydperk van 20 weke?
 - (e) Thabo het 15 weke voor die einde van die jaar begin oefen. Sy doelwit is om voor die einde van die jaar 'n totaal van 3000 km af te lê. Gaan hy sy doelwit bereik?
2. 'n Boom word uitgeplant wanneer dit 'n hoogte van 2m het. In die eerste jaar groei dit 1,5m. In die tweede jaar groei dit 1,2m, in die derde jaar 0,96m, in die vierde jaar 0,768m, ensovoorts. Wat is die maksimum hoogte wat die boom kan bereik?

**KAN JY?****Antwoorde:**

1. (a) 260 km
(b) $n = 10$
(c) 3850 km
(d) $S_{15} = 2\,325$ km,
 \therefore Nee, hy gaan nie sy doelwit bereik nie.
2. 9,5m

KONSOLIDASIE:**Opsomming**

	REKENKUNDIG $a; a + d; a + 2d; \dots$	MEETKUNDIG $a; ar; ar^2; \dots$
Toets	Konstante Verskil: $d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$	Konstante verhouding: $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$
Algemene Term	$T_n = a + (n - 1)d$	$T_n = ar^{n-1}$
Som	$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$ $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$
Konvergeer vir		$-1 < r < 1$
Som tot oneindigheid	Nie van toepassing	$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

AKTIWITEITE/ ASSESSERING

Handboek	Mind Action Series	Everything Maths Siyavula	Wiskunde vir die Klaskamer	Via Afrika Wiskunde
Som tot oneindigheid	Oefening: 6 Bladsy: 19	Oefening: 1.4- 1.61 Bladsy: 14-18	Oefening: 1.9 Bladsy: 31	Oefening: 5 Bladsy 29
Toepassings	Oefening: 10 Bladsy: 33	Oefening: 1.9 Bladsy: 35	Oefening: 1.11 Bladsy: 35	Oefening: 6 Bladsy 31