VAK EN GRAAD	WISKUNDE Graad 12	
KWARTAAL 1	Week 5	
ONDERWERP	Stelling vir Gelykvormigheid van Driehoeke	
DOEL VAN LES	Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig. Indien die ooreenstemmende sye van twee driehoeke in dieselfde verhouding is, dan is die twee driehoeke gelykvormig.	
BRONNE	***Papier bronne***	***Digitale bronne***
	Gaan na die hoofstuk oor Gelykvormigheid in jou handboek of die Mind the Gap studiegids.	https://www.youtube.com/watch?v=VZt4wXBo1PA

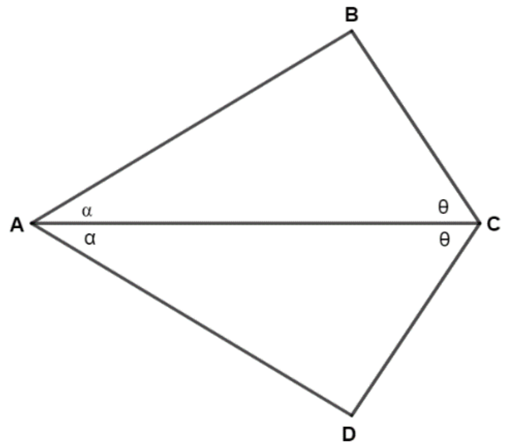
INLEIDING

Kom ons gaan terug na wat ons geleer het in die vorige grade oor kongruensie van driehoeke.

<u>KONGRUENSIE (≡):</u> Twee driehoeke is k**ongruen**t indien hulle **dieselfde grootte en vorm** het**.** Dus is die twee driehoeke **identies**, die **ooreenstemmende hoeke is dieselfde en die ooreenstemmende is in dieselfde verhouding**.

Die vier gevalle van kongruensie vir twee driehoeke is:

1. 3 gelyke sye: (S; S; S)
2. 2 sye en ’n ingeslote hoek: (S; H; S)
3. 2 hoeke en ’n sy: (H; H; S)
4. ’n Regte hoek, skuinssy en ’n sy: (90°; Skuinssy; S)



In ΔABC en ΔADC :

1. $B\hat{A}C = D\hat{A}C$ gegee
2. $B\hat{C}A = D\hat{C}A$ gegee
3. AC is gemeen

$\therefore\ \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (H; H; S)

Aangesien die driehoeke kongruent is, is: , $\hat{B} = \hat{D}$; $AB = AD$ en $BC = DC$

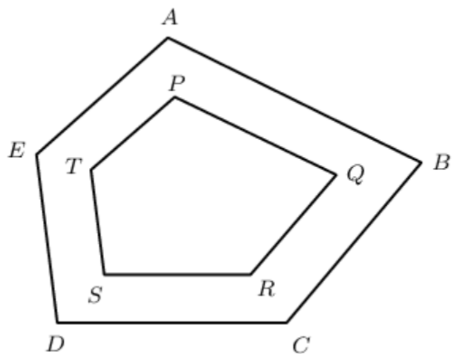
KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

<u>GELYKVORMIGHEID (|||):</u> Veelhoeke is **gelykvormig** wanneer hulle **dieselfde vorm** het. Indien twee veelhoeke gelykvormig is, is die een ’n vergroting van die ander. Twee veelhoeke is gelykvormig as en slegs as:

Alle pare ooreenstemmende hoeke gelyk is **EN**

alle pare ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding (eweredig) is.

Albei hierdie voorwaardes moet bevredig word vir twee veelhoeke om gelykvormig te wees.



Vir driehoeke, is enige een van die twee voorwaardes genoegsaam om gelykvormigheid te verseker.

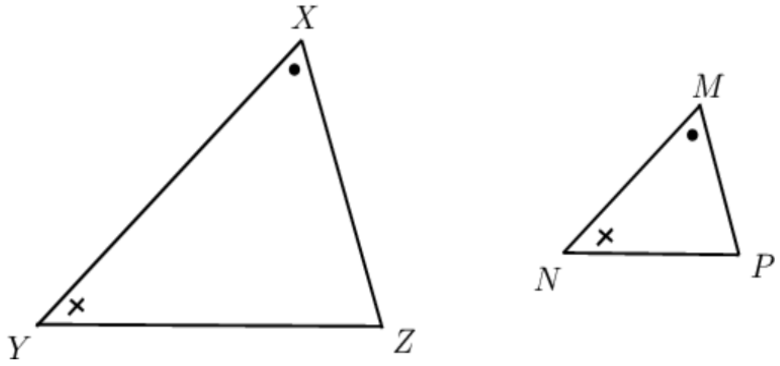
Dus vir enige twee driehoek as:

Alle pare ooreenstemmende hoeke gelyk is, dan is die twee driehoeke gelykvormig,

OF

indien alle pare ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding is, dan is die twee driehoeke gelykvormig.

Indien enige **een** van die voorwaardes waar is vir twee driehoeke, **dan is die ander voorwaarde ook waar**.



<u>NOTASIE</u>

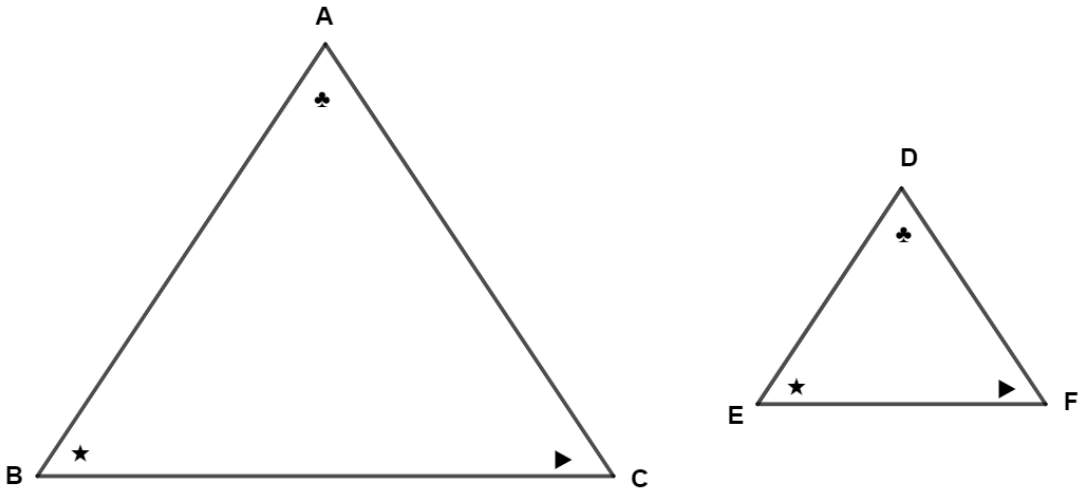
$\Delta XYZ\ |||\ \Delta\, MNP$ beteken driehoek XYZ is gelykvormig aan driehoek MNP’. Die **volgorde** waarin die letters geskryf word is baie belangrik, aangesien dit aandui **watter hoek gelyk is.** Dit wil sê $\hat{X} = \hat{M}$, $\hat{Y} = \hat{N}$ en $\hat{Y} = \hat{P}$.

Die volgorde dui ook aan watter **verhoudings van sye** gelyk is: $\Delta\text{XYZ}\ |||\ \Delta\ \text{MNP}$

$$\frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP} = \frac{XZ}{MP} \quad \text{of} \quad \frac{XY}{YZ} = \frac{MN}{NP} \quad \text{of} \quad \frac{XY}{XZ} = \frac{MN}{MP} \quad \text{of} \quad \frac{YZ}{XZ} = \frac{NP}{MP}$$

<u>STELLING 2</u>: GELYKVORMIGHEID IN DRIEHOEKE

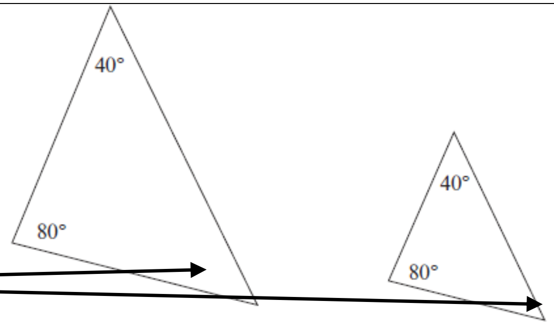
Indien twee driehoeke gelykhoekig is, sal hulle ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding wees, en gevolglik sal die driehoeke gelykvormig wees



Gegee: Δ**ABC en** Δ**DEF** met $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$ en $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}$

Gevolgtrekking: $\frac{\boldsymbol{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{DF}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{EF}}$ en gevolglik $\Delta\mathbf{ABC} \,|||\, \Delta\,\mathbf{DEF}$ **.** Rede: $\angle\angle\angle$

NOTA:
As twee driehoeke twee ooreenkomstige hoeke het wat gelyk is, dan sal die derde hoek in elke driehoek gelyk wees aan mekaar (som van die hoeke van 'n driehoek = 180°) en die driehoeke is daarom gelykvormig en hulle sye sal eweredig wees. Die verkorte rede wat jy kan gebruik is (*derde hoek*)



As twee hoeke dieselfde is, dan is die derde hoek van albei driehoeke

180° – (40° + 80°) (som van hoeke in Δ) = 60°

Bewys van Stelling 2.

Indien twee driehoeke gelykhoekig is, sal hulle ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding wees, en gevolglik sal die driehoeke gelykvormig wees.

Gegee: $\Delta\mathbf{ABC}$ en $\Delta\mathbf{DEF}$ met $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$ en $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}$

Om te bewys : $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{DF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{EF}}$ en gevolglik is $\Delta\mathbf{ABC}\ |||\ \Delta\ \mathbf{DEF}$

Bewys:

Konstruksie: Merk P op AB en Q op AC, sodat AP = DE en AQ = DF. Trek PQ.

In ΔAPQ en Δ DEF :

1. $\hat{A} = \hat{D}$ (gegee)
2. $AP = DE$ (konstruksie)
3. AQ = DF (konstruksie)

$\therefore$ ΔAPQ ≡ Δ DEF (S; ∠; S)

$\therefore A\hat{P}Q = \hat{E}$ $(\equiv\ \Delta^e)$

En $\hat{E} = \hat{B}$ (gegee)

$\therefore A\hat{P}Q = \hat{B}$

$\therefore$ PQ ∥ BC (ooreenk. $\angle^e$ =)

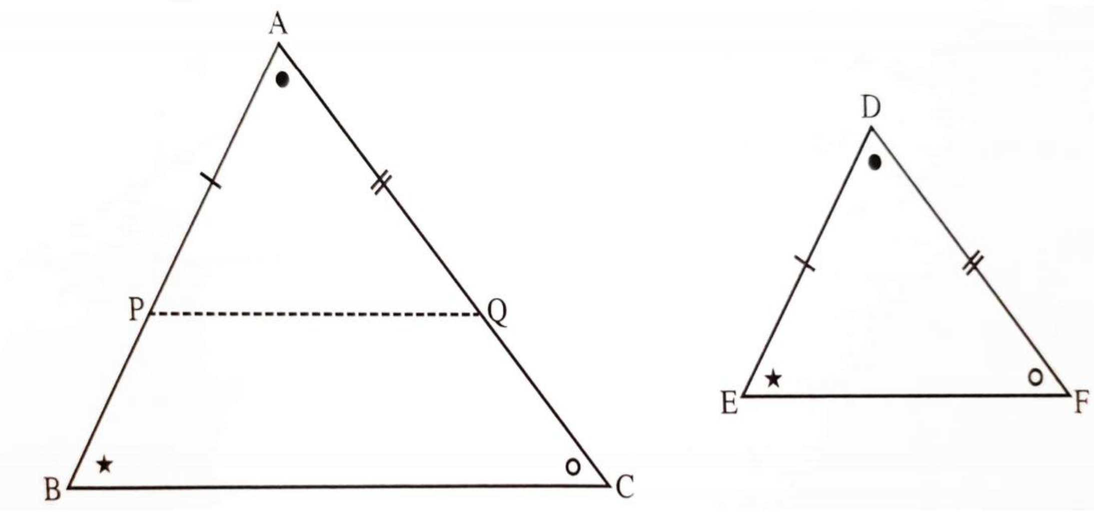
$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$ (lyn ∥een sy van Δ)

Maar AP = DE en AQ = DF

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

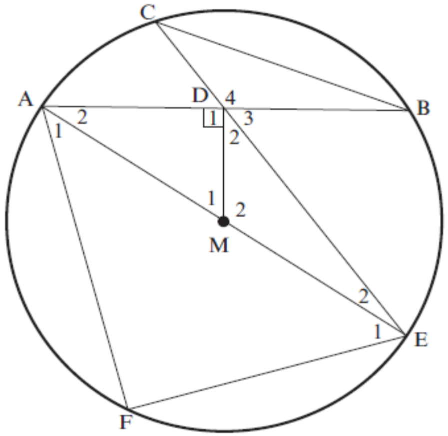
Netso, deur P op BA af te merk, en Q op BC, sodat BP = ED en BQ = EF, kan aangetoon word dat $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{DF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{EF}}$



Voorbeeld 1:

Middellyn AME van sirkel met middelpunt M halveer $F\hat{A}B$. MD is loodreg op die koord AB. ED verleng ontmoet die sirkel by C en CB word verbind.



a) Bewys $\Delta AEF \parallel\!\mid \Delta AMD$ (5)

b) Bepaal gevolglik die numeriese waarde van $\frac{AF}{AD}$ (5)

c) Bewys Δ CDB ||| ΔADE (4)

d) Bewys $AD^2 = CD.\,DE$ (3)

[17]

Oplossing:

a) $\hat{F} = 90°$ ($\angle$ in halwe sirkel)

$\hat{D}_1 = 90°$ (gegee MD $\perp$ AB)

$\therefore\ \hat{F} = \widehat{D_1}$

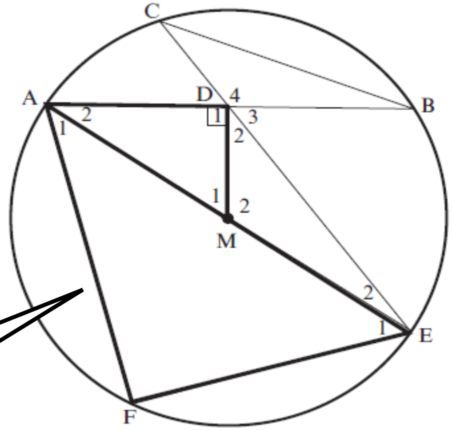
In ΔAEF en ΔAMD

$\hat{F} = \hat{D}_1$ (reeds bewys)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AM halveer $\angle$FAB)

$\therefore\ \hat{E}_1 = \hat{M}_1$ (derde $\angle$ van Δ)

$\therefore \Delta AEF\ |||\ \Delta AMD$ ($\angle\angle\angle$)



Merk die driehoeke waarmee jy werk

b) $\frac{AE}{AM} = \frac{EF}{MD} = \frac{AF}{AD}$ (||| Δ^e)

$AM = ME$ (radiusse)

$\therefore\ AE = 2AM$

$\therefore\ \frac{2AM}{AM} = \frac{AF}{AD}$

$\frac{AF}{AD} = 2$

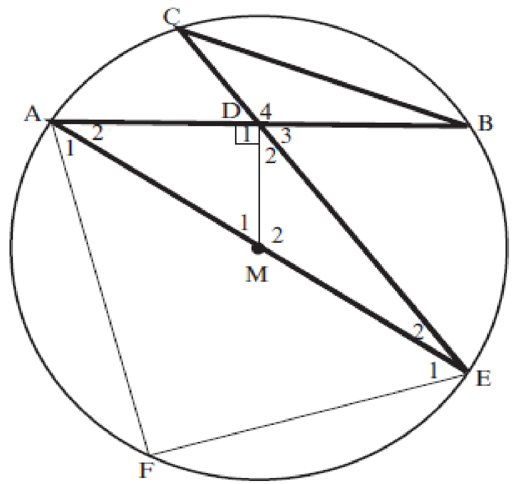
c) In ΔCDB en ΔADE

$\hat{C} = \hat{A}_2$ (∠s in dieselfde segment)

$\hat{B} = \hat{E}_2$ (∠s in dieselfde segment)

$\hat{D}_4 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2$ (regoorst. ∠'e =)

$\therefore \Delta CDB \,|||\, \Delta ADE$ (∠ ∠ ∠)



d) $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{DB}{DE}$ (||| Δ'e)

$\therefore CD.DE = AD.DB$

maar AD = DB (MD ⊥ AB, M is middelpt.)

$\therefore$ CD. DE = AD.AD

$\therefore AD^2 = CD.DE$

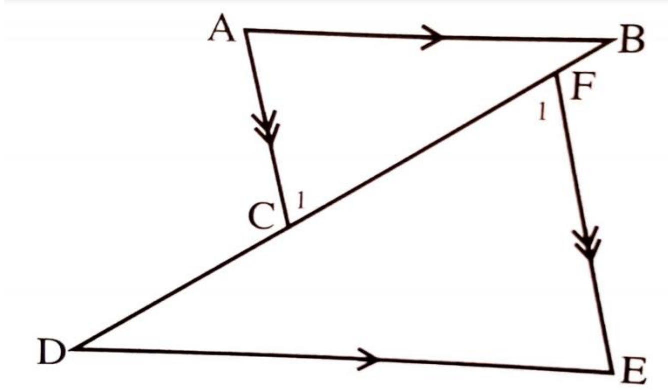
KAN JY:

1) In die onderstaande skets, is AB ∥ DE en AC ∥ FE .

Bewys dat:

(a) $\Delta BCA \,|||\, \Delta DFE$

(b) $AB.EF = AC.ED$



2) In die bygaande skets, is SR raaklyn aan sirkel PST by S.

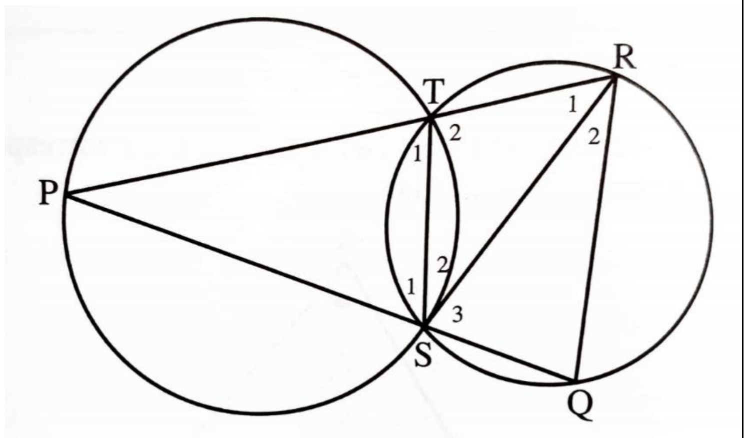
Bewys dat:

(a) $\Delta PRS \,|||\, \Delta SRT$

(b) $RS^2 = PR.RT$

(c) $\Delta PQR \,|||\, \Delta PTS$

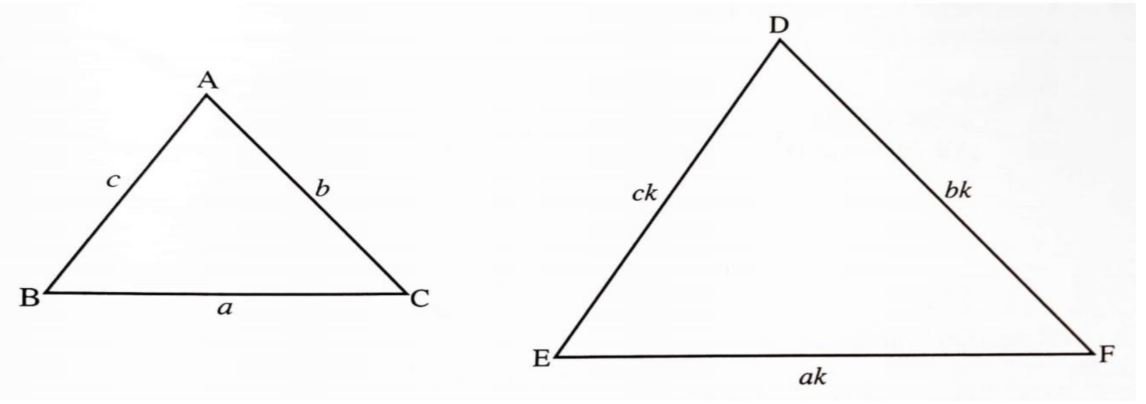
(d) $\dfrac{RT}{PT} = \dfrac{RS^2}{PQ\,.\,PS}$



Die gebruik van sye om driehoeke gelykvormig te bewys

OMGEKEERDE VAN STELLING 2.

Indien die ooreenstemmende sye van twee driehoeke in dieselfde verhouding is, sal die driehoeke gelykhoekig wees, en gevolglik ook gelykvormig.



Gegee: $\Delta\mathbf{ABC}$ en $\Delta\mathbf{DEF}$ met

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{DF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{EF}}$$

Gevolgtrekking: $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}$ en dus is

$\Delta\mathbf{ABC} \mathbin{|||} \Delta\,\mathbf{DEF}$. **Rede**: sye van Δ 'e in verhouding.

<u>Voorbeeld 2:</u>

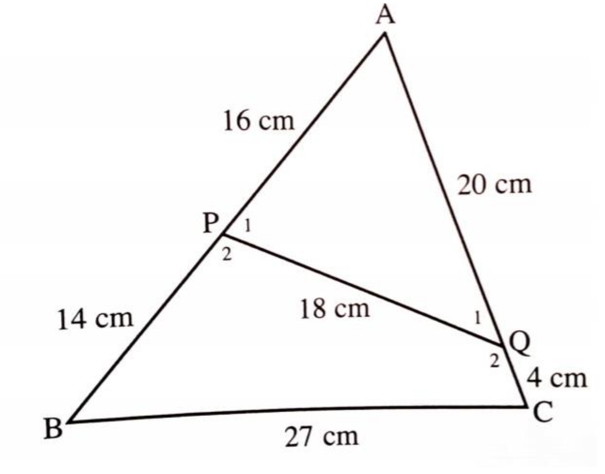
In die bygaande skets is, $\text{AP} = 16\text{cm}$, $\text{PB} = 14\text{cm}$

$\text{AQ} = 20\text{cm}$, QC= 4cm en $\text{BC} = 27\text{cm}$.

Bewys dat :

(a) $\Delta\text{APQ} \mathbin{|||} \Delta\,\text{ACB}$

(b) PBCQ 'n koordevierhoek is.



Oplossing:

a) $\dfrac{\text{AP}}{\text{AC}} = \dfrac{16\text{cm}}{24\text{cm}} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{\text{PQ}}{\text{CB}} = \dfrac{18\text{cm}}{27\text{cm}} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{\text{AQ}}{\text{AB}} = \dfrac{20\text{cm}}{30\text{cm}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{\text{AP}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{PQ}}{\text{CB}} = \dfrac{AQ}{\text{AB}}$

(b) $\hat{P}_1 = \hat{C}$ (||| Δ'e)

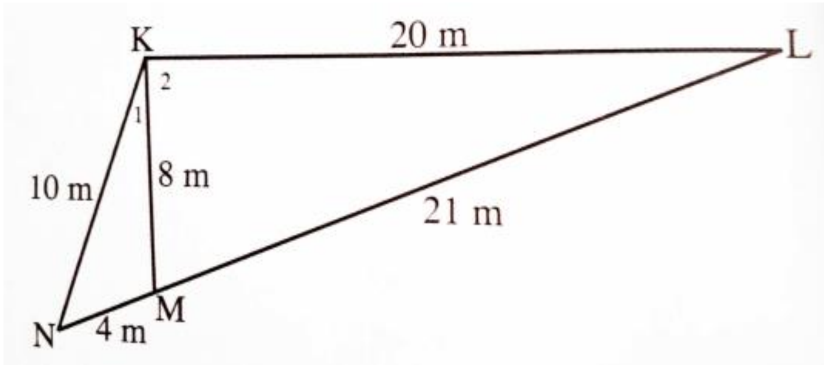
$\therefore \Delta APQ \; ||| \; \Delta ACB$ (sye van Δ^e in verh.)

$\therefore$ PBCQ is ’n koordevierhoek. (buite∠ van vierhoek = teenoorst. binne∠)

KAN JY:

In die bygaande skets is, $KL = 20m$, $KN = 10m$

$MN = 4m$, $KM = 8m$ en $LM = 21m$.



Bewys dat:

(a) $\Delta KMN \; ||| \; \Delta LKN$

(b) KN is ’n raaklyn aan sirkel LMK by K.

<u>**Identifisering van Driehoeke**</u>: Soms word daar van ons verwag om verhoudings en/of produkte gelyk te bewys sonder dat daar in die vraag aangetoon word watter driehoeke om gelykvormig te bewys.

In sulke gevalle identifiseer ons eers die betrokke driehoeke.

Gestel byvoorbeeld dat ons moet bewys dat $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD}$. Daar is twee moontlike maniere om die betrokke driehoeke te identifiseer:

1) Driehoek bo, driehoek onder

$$\frac{\overline{\Delta ABC}}{\underline{\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}}} \quad \Delta ACD$$

Is die boonste sye (AB en BC) sye van een driehoek

En die onderste sye (AD en CD) sye van ’n ander driehoek

Indien elkeen van hierdie sye die sye van ’n driehoek in die skets is, kan jy voortgaan om te bewys dat hierdie driehoeke gelykvormig is.

2) Driehoek links, driehoek regs

Is die sye links (AB en AD) sye van een driehoek

$$\Delta ABD \left| \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \right| \Delta BCD$$

Die sye regs (BC en CD) sye van ’n ander driehoek

Indien elkeen van hierdie sye die sye van ’n driehoek in die skets is, kan jy voortgaan om te bewys dat hierdie driehoeke gelykvormig is.

Voorbeeld 3:

In die meegaande skets is, AP ’n raaklyn aan sirkel by P. PN ∥ SR

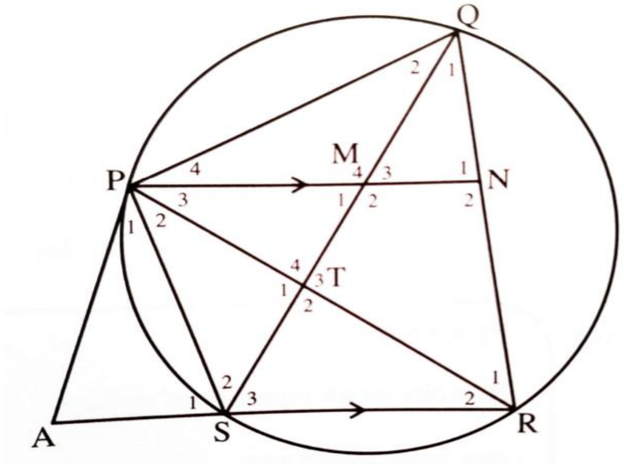
Bewys dat :

(a) $\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{RT}}$

(b) $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{ST}}$

(c) $\mathrm{PM} \,.\, ST = \mathrm{RS} \,.\, \mathrm{MT}$

(d) $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AR} \,.\, \mathrm{AS}$



Oplossing:

a)

$$\frac{\Delta\mathrm{PST} \checkmark}{\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{RT}}}$$
$$\Delta\mathrm{QRT} \checkmark$$

ΔPST en ΔQRT is albei driehoeke in die skets, en ons kan hulle gevolglik gebruik om die gelykvormigheid te bewys.

In ΔPST en ΔQRT:

$\hat{P}_2 = \hat{Q}_1$ (∠$^{\mathbf{e}}$ in dieselfde segment)

$\hat{S}_2 = \hat{R}_1$ (∠$^{\mathbf{e}}$ in dieselfde segment)

$\hat{T}_1 = \hat{T}_3$ (3^{de}∠ van Δ)

∴ ΔPST ||| Δ QRT (∠∠∠)

Die volgorde van die letters is baie belangrik.

∴ $\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{RT}}$ (||| Δ^e)

b)

ΔPQRS??? ✘

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{ST}}$$

Die boonste sye gee nie ’n driehoek in die skets nie.

ΔPQT ✓ $\left|\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{ST}}\right|$ ΔRST ✓

ΔPST en ΔQRT is albei driehoeke in die skets, en ons kan hulle gevolglik gebruik om die gelykvormigheid te bewys.

In ΔPQT and ΔRST:

$\hat{P}_3 + \hat{P}_4 = \hat{S}$ (∠$^{\mathbf{e}}$ in dieselfde segment)

$\hat{Q}_2 = \hat{R}_2$ (∠$^{\mathbf{e}}$ in dieselfde segment)

$\hat{T}_4 = \hat{T}_2$ (3^{de}∠ van Δ)

∴ ΔPQT ||| Δ SRT (∠∠∠)

Die volgorde van die letters is baie belangrik

∴ $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{ST}}$ (||| Δ^e)

(c)

$$PM \cdot \boxed{ST} = \boxed{RS} \cdot MT \rightarrow \frac{PM}{RS} = \frac{MT}{ST}$$

ΔMPT ✓

$$\frac{PM}{RS} = \frac{MT}{ST}$$

ΔRST ✓

Bewys dat ΔMPT en ΔRST gelykvormig is.

In ΔMPT en ΔRST:

$\hat{P}_3 = \hat{R}_2$ (verw. $\angle^e$; PN ∥ SR)

$\hat{M}_1 = \hat{S}_3$ (verw. $\angle^e$; PN ∥ SR)

$\hat{T}_4 = \hat{T}_2$ ($3^{de}\angle$ van Δ)

$\therefore$ ΔPMT ||| Δ RST (∠∠∠)

$\therefore \frac{PM}{RS} = \frac{MT}{ST}$ (||| Δ^e)

$\therefore$ PM . ST = RS. MT

(d) **Herskryf die kwadraat as 'n produk:**

$\mathbf{AP^2 = AR.AS}$

$\therefore$ **AP . AP = AR . AS**

$$AP \cdot \boxed{AP} = \boxed{AR} \cdot AS \rightarrow \frac{AP}{AR} = \frac{AS}{AP}$$

ΔAPS ✓

$$\frac{AP}{AR} = \frac{AS}{AP}$$

ΔAPR ✓

Bewys dat ΔAPS en ΔAPR gelykvormig is.

In ΔAPS and ΔAPR:

$\hat{P}_1 = \hat{R}_2$ (∠ tussen raaklyn en koord)

$\hat{A} = \hat{A}$ (gemeen)

$\hat{S}_1 = \hat{P}_1 + \hat{P}_2$ ($3^{de}\angle$ van Δ)

$\therefore$ ΔPAS ||| Δ RAP (∠∠∠)

Die volgorde van die letters is baie belangrik

$\therefore \frac{PA}{RA} = \frac{AS}{AP}$ (||| Δ^e)

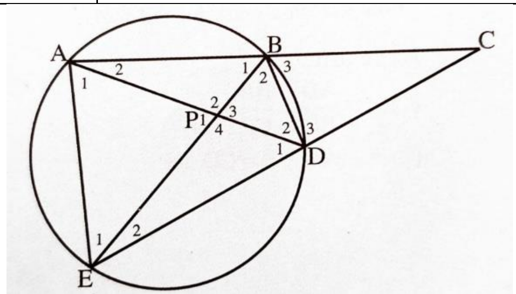
$\therefore AP^2 = AR.AS$

KAN JY:

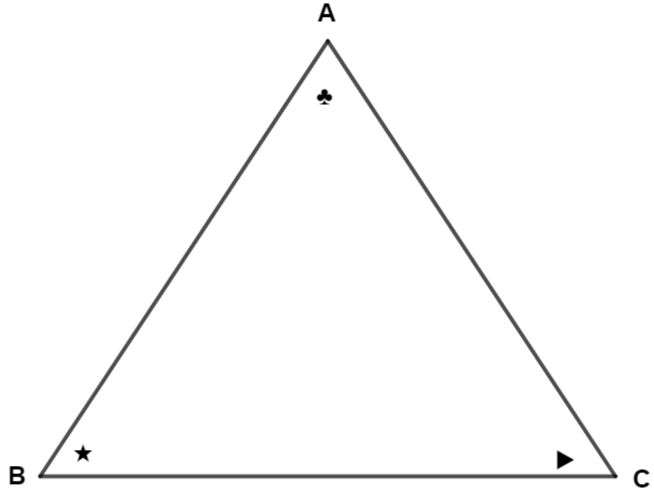
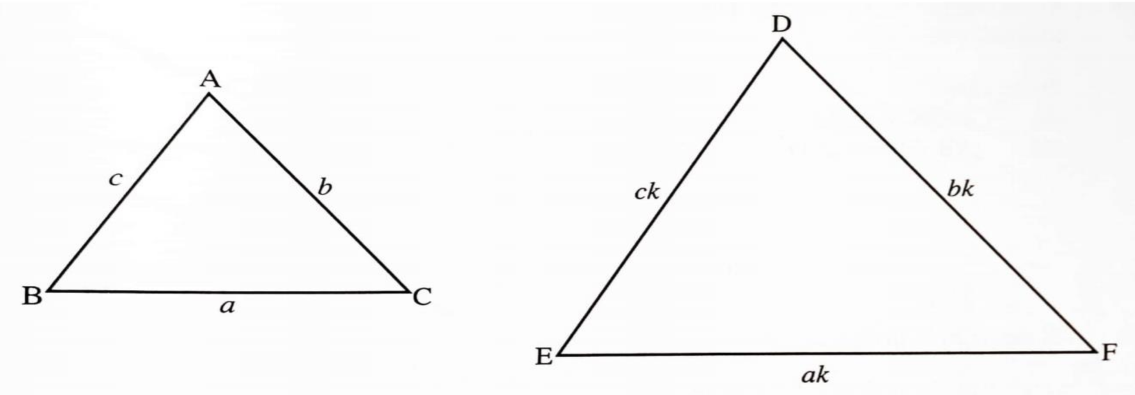
In die meegaande skets, bewys dat:

(a) $\frac{AB}{ED} = \frac{AP}{EP}$

(b) AE . CD = AC . BD



AKTIWITIETE/ ASSESSERING		**Clever**	**Mind Action Series**	**Wiskunde vir die klaskamer**	**Via Afrika Wiskunde**
		Oef: 11.3 & 11.4 Bl. 288 & 293	Oef: 5 & 6 Bl. 249 & 256	Oef: 11.3 Bl. 295	Oef:4 Bl. 242

KONSOLIDASIE	**Indien twee driehoeke gelykhoekig is, sal hulle ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding wees, en gevolglik sal die driehoeke gelykvormig wees**.  **Gegee**: $\Delta\mathbf{ABC}$ en $\Delta\mathbf{DEF}$ met $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}$ **Dan is :** $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{DF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{EF}}$ **en** $\Delta\mathbf{ABC}\ \lvert\lvert\lvert\ \Delta\ \mathbf{DEF}$. **OMGEKEERDE VAN STELLING 2.** Indien die ooreenstemmende sye van twee driehoeke in dieselfde verhouding is, sal die driehoeke gelykhoekig wees, en gevolglik ook gelykvormig.  **Gegee**: $\Delta\mathbf{ABC}$ en $\Delta\mathbf{DEF}$ met $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DE}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{DF}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{EF}}$ **Dan is:** $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}$ **en** $\Delta\mathbf{ABC}\ \lvert\lvert\lvert\ \Delta\ \mathbf{DEF}$.