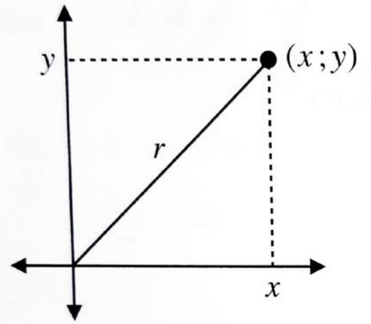
VAK EN GRAAD	WISKUNDE	
KWARTAAL 1	Week 7	
ONDERWERP	Trigonometrie – Saamgestelde en Dubbel hoeke	
DOEL VAN LES	Saamgestelde hoek Identiteite Dubbel hoek identiteite	
BRONNE	***Papier bronne***	BRONNE
	Mind the Gap; Jou handboek	https://www.youtube.com/watch?v=VZt4wXBo1PA

INLEIDING

Kom ons gaan terug en hersien die basiese konsepte.

OORSIG VAN BASIESE KONSEPTE

DEFINISIES EN PYTHAGORUS:



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

REDUKSIE en KO-FUNKSIE FORMULES

Tweede Kwadrant:

- **sinusfunksie is positief**
- $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$
- $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

Eerste Kwadrant:

- **alle funksies is positief**
- $\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$
- $\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$
- $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

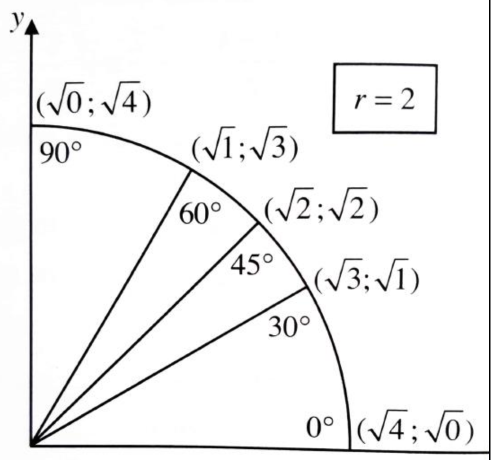
Derde Kwadrant:

- **tangensfunksie is positief**
- $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$

Vierde Kwadrant:

- **cosinusfunksie is positief**
- $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$

SPESIALE HOEKE:



IDENTITEITE:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

AFSTAND FORMULE:

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

KOSINUS reël:

In ΔABC:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos\hat{C}$$

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

SAAMGESTELDE HOEKE: ‘n Saamgestelde hoek is ‘n nuwe hoek wat gevorm word wanneer enige twee hoeke bymekaar getel word, of wanneer hulle afgetrek word, byvoorbeeld $\hat{A} + \hat{B}$, $\alpha - \beta$, $\theta + 30°$, $x - 60°$ ens.

ONDERSOEK: Joey ondersoek die volgende vraag: $\cos(180° - 120°)$

Joey se oplossing:

$$\begin{aligned}\cos(180° - 120°) &= \cos 180° - \cos 120° \\ &= -1 - (\cos(90° + 30°) \\ &= -1 + \sin 30° \\ &= -1 + \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

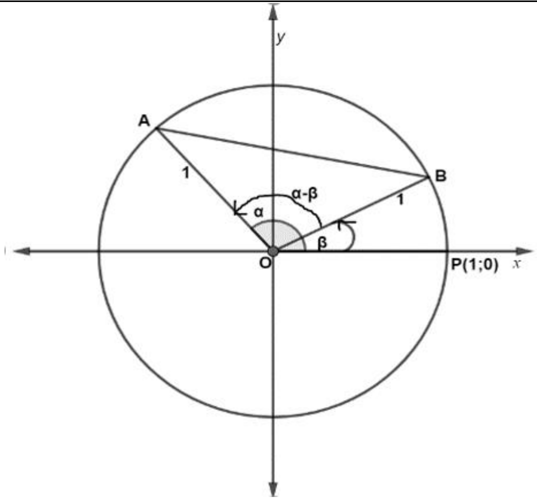
1. Oorweeg Joey se oplossing en stel vas waarom dit verkeerd is.
2. Gebruik ’n sakrekenaar om te kontroleer dat Joey se antwoord verkeerd is.
3. Beskryf in woorde die fout(e) in sy oplossing.
4. Is die volgende bewering waar of vals?

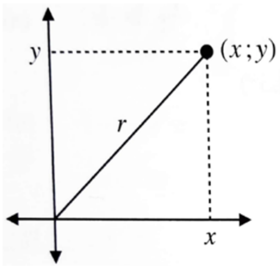
’n Trigonometriese verhouding kan versprei word oor die hoeke in die hakies.”

Van die ondersoek hierbo weet ons dat $\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta}$. **Dit is verkeerd om die distributiewe eienskap toe te pas op die trigonometriese verhoudings van saamgestelde hoeke.**

Afleiding van $\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta)}$**:** Deur die gebruik van die **afstand formule en die kosinus reël** kan ons die identiteit vir die volgende saamgestelde hoek aflei:

$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$



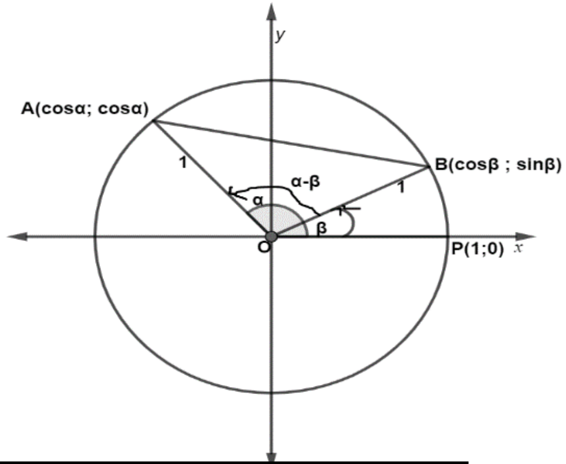


$\frac{x}{r} = \cos\theta$

$x = r\cos\theta$

$\frac{y}{r} = \sin\theta$

$y = r\sin\theta$



$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ **(afstand formule)**

$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$

$= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + 1 - 2\sin\alpha\sin\beta$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

In ΔABO: toepassing van die **kosinus formule**

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2(AO)(BO)\cos(\alpha - \beta)$

$= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$

$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$

Dus is: $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$-2\cos(\alpha - \beta) = -2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

<u>Saamgestelde Hoeke: Identiteite</u>

$\mathbf{\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B}$

$\mathbf{\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B}$

$\mathbf{\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B}$

$\mathbf{\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B}$

Bewys van die saamgestelde hoek identiteite:

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos\big(A-(-B)\big)\\ &= \cos A\cos(-B)+\sin A\sin(-B)\\ &= \cos A\cos B-\sin A\sin B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \cos\big(90^\circ-(A+B)\big)\\ &= \cos\big((90^\circ-A)-B\big)\\ &= \cos(90^\circ-A)\cos B+\sin(90^\circ-A)\sin B\\ &= \sin A\cos B+\cos A\sin B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(A-B) &= \sin\big(A+(-B)\big)\\ &= \sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)\\ &= \sin A\cos B-\cos A\sin B\end{aligned}$$

Hierdie formules kan gebruik word om 'n trigonometriese verhouding van 'n saamgestelde hoek **uit te brei** tot 'n uitdrukking wat bestaan uit trigonometriese verhoudings van die individuele hoeke.

VOORBEELD 1: Brei elk van die volgende saamgestelde hoeke uit en vereenvoudig waar moontlik:

(a) $\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y$

(b) $\cos(\alpha+10^\circ) = \cos\alpha\cos 10^\circ-\sin\alpha\sin 10^\circ$

Saamgestelde hoek identiteit

(c) $\cos(x+60^\circ) = \cos x\ \cos 60^\circ-\sin x\ \sin 60^\circ$

$$= \cos x.\left(\frac{1}{2}\right)+\sin x.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ Spesiale Hoeke

$$= \frac{\cos x+\sqrt{3}\ \sin x}{2}$$ Vereenvoudig

(d) $\sin(3x-45^\circ) = \sin 3x\cos 45^\circ+\cos 3x\sin 45^\circ$ Saamgestelde hoek identiteit

$$= \sin 3x.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos 3x.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ Spesiale Hoeke

$$= \frac{\sqrt{2}\sin 3x-\sqrt{2}\ \cos 3x}{2}$$

Die saamgestelde hoek-formules kan ook gebruik word om sekere trigonometriese uitdrukkings te **vereenvoudig** tot ’n **enkele trigonometriese verhouding**:

VOORBEELD 2: Skryf die volgende as ’n enkele trigonometriese verhouding:

(a) $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)}$

(b) $\sin x\cos 40° + \cos x\sin 40° = \boldsymbol{\sin(x+40°)}$

(c) $\cos 2x\sin 3x - \sin 2x\cos 3x$

$= \sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x$

herrangskik terme in identiteits vorm

$= \sin(3x-2x)$

Saamgestelde hoek identiteit

$= \sin x$

VOORBEELD 3: Vereenvoudig: $\sin(x+30°) - \sin(x-30°)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin(x+30°) - \sin(x-30°) &= \boldsymbol{\sin x\cos 30°} + \boldsymbol{\cos x\sin 30°} - (\boldsymbol{\sin x\cos 30°} - \boldsymbol{\cos x\sin 30°})\\ &= \sin x\cos 30° + \boldsymbol{\cos x\sin 30°} - \sin x\cos 30° + \boldsymbol{\cos x\sin 30°}\\ &= 2\cos x\,\boldsymbol{\sin 30°}\\ &= 2\cos x\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \cos x\end{aligned}$$

VOORBEELD 4: Bereken die volgende sonder die gebruik van ’n sakrekenaar:

(a) $\cos 75° = \boldsymbol{\cos(30°+45°)}$

Skryf i.t.v spesiale hoeke

$= \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45°$

Saamgestelde hoek identiteit

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Vereenvoudig

KAN JY:

1) Brei die volgende uit.

a) $\cos(\alpha+70°) =$
b) $\sin(x-45°) =$

2) Skryf die volgende as ’n enkele trigonometriese verhouding.

a) $\cos 14°\sin 6° + \cos 6°\sin 14°$
b) $\cos\theta\cos 4\theta - \sin\theta\sin 4\theta$

(b) $\sin 70° \sin 10° + \cos 10° \cos 70°$ $= \cos 70° \cos 10° + \sin 70° \sin 10°$ $= \cos(70° - 10°)$ $= \cos 60°$ $= \frac{1}{2}$ herrangskik terme in identiteits vorm Saamgestelde hoek identiteit	3) Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: a) $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$ b) $\cos 15°$ c) $\sin 80° \sin 55° - \sin 10° \cos 67°$

<u>DUBBELHOEKE</u>: 'n Dubbelhoek is 'n hoek wat gevorm word deur 'n hoek by homself te tel, byvoorbeeld $\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{2}\hat{\mathbf{A}}$; $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}$; $\mathbf{10°} + \mathbf{10°} = \mathbf{20°}$ e.n.s

$$\begin{aligned}\sin 2A &= \sin(A + A)\\ &= \sin A \cos A + \cos A \sin A\\ &= 2 \sin A \cos A\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{\sin 2A = 2 \sin A \cos A}}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos(A + A)\\ &= \cos A \cos A - \sin A \sin A\\ &= \cos^2 A - \sin^2 A\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A}}$$

Deur die identiteit, $\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}\\ &\mathbf{\cos^2 A = 1 - \sin^2 A}\\ &\mathbf{\sin^2 A = 1 - \cos^2 A}\end{aligned}}$ kan ons die formule $\mathbf{\cos 2A}$ herskryf as

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \mathbf{\cos^2 A} - \sin^2 A\\ &= \mathbf{1 - \sin^2 A} - \sin^2 A\\ &= 1 - 2\sin^2 A\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A}}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \mathbf{\sin^2 A}\\ &= \cos^2 A - (\mathbf{1 - \cos^2 A})\\ &= 2\cos^2 A - 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos 2A = 2\cos^2 A - 1}}$$

VOORBEELD 5: Vereenvoudig die volgende:

a) $\cos 2x + 2\sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x$
$= 1$

b) $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$

$= 2\cos\theta$

c) $\frac{\cos 2A + 1}{2\cos A}$

$= \frac{2\cos^2 A - 1 + 1}{2\cos A}$

$= \frac{2\cos^2 A}{2\cos A} \quad = \quad \cos A$

VOORBEELD 6: Bereken die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$
$= \sin 2(15)$
$= \sin 30^\circ$
$= \frac{1}{2}$

b) $\sin 22{,}5^\circ\cos 22{,}5^\circ$
$= \frac{1}{2}\,(2\sin 22{,}5^\circ\cos 22{,}5^\circ)$
$= \frac{1}{2}\sin(2\times 22{,}5)$
$= \frac{1}{2}\sin(45^\circ)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $2\cos^2 15^\circ$
$= 2\cos^2 15^\circ - 1 + 1$
$= \cos(2\times 15^\circ) + 1$
$= \cos 30^\circ + 1$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$
$= \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

VOORBEELD 7: Indien $\mathbf{5\tan\alpha - 12 = 0}$ met $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{180^\circ; 360}]$ en $\mathbf{5\cos\beta = -3}$ met $\mathbf{\sin\beta > 0}$**,** bepaal die waarde van die volgende trigonometriese verhoudings sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, en met behulp van 'n diagram.

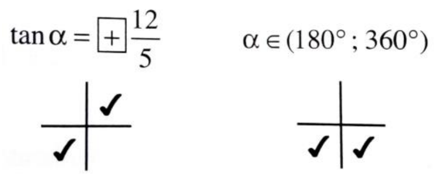
a) $\sin(\alpha+\beta)$ b) $\sin(\alpha-\beta)$ c) $\cos(\alpha+\beta)$ d) $\sin 2\beta$

Oplossing:

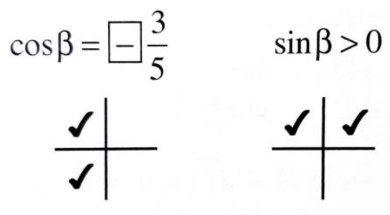
a) $\sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$= \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) + \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{65}$

b) $\sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$= \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) - \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{56}{65}$

Rowe werk



$\boldsymbol{\alpha}$ is 'n hoek in die derde kwadrant



$\boldsymbol{\beta}$ is 'n hoek in die tweede kwadrant

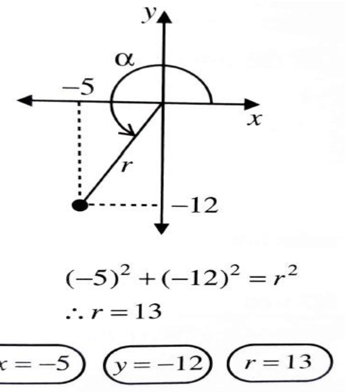
c) $\cos(\alpha+\beta)$

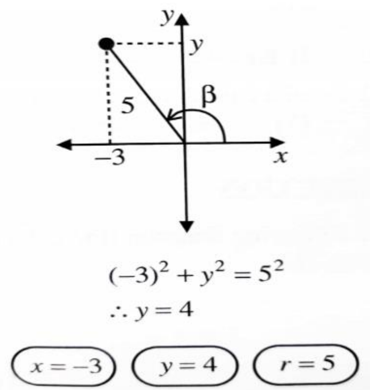
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) - \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{63}{65}$

d) $\sin 2\beta$

$= 2\sin\beta\cos\beta$





DIE BEWYS VAN IDENTITIETE: Wanneer identiteite bewys word, werk ons altyd met die twee kante (LK en RK) apart, en vereenvoudig en manipuleer die twee kante totdat hulle gelyk is aan mekaar of gelyk aan dieselfde uitdrukking.

WENK: (1) Begin vereenvoudig die meer komplekse kant van die identiteit. Vervang, $\boldsymbol{\tan\theta}$ met $\boldsymbol{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$.

(2) Vervang die dubbel of saamgestelde hoeke met enkel hoeke waar moontlik.

(3) Dus vervang, $\boldsymbol{\sin 2\theta}$ met $\boldsymbol{2\sin\theta\cos\theta}$**.**

(4) $\boldsymbol{\cos 2x}$ het 3 identiteite waaruit jy kan kies. Dit help as jy **kyk na wat jy moet bewys om sodoende die identiteit te kies wat skynbaar die beste keuse sal wees**.

VOORBEELD 8:

Bewys dat $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$

Oplossing:

LK $= \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{1+(2\cos^2 x - 1)}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$= RK$

VOORBEELD 9:

Bewys: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Oplossing:

LK $= \sin 3x$

$= \sin(2x+x)$

$= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$

$= 2\sin x\cos x\cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x$

$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

$= RK$

VOORBEELD 10:

Bewys: $\frac{1-\cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x}{\cos x}$

Oplossing:

LK $= \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$

$= \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{\sin x}$

$= \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = \boldsymbol{2\sin x}$

RK $= \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}$

$= \boldsymbol{2\sin x}$

KAN JY:

1.) Bewys die volgende identiteite:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

b) $\tan\theta + \frac{cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$

c) $\frac{\sin\beta - \sin 2\beta}{\cos\beta - \cos 2\beta - 1} = \tan\beta$

2.) Indien $25\sin\alpha - 7 = 0$, met $90° \leq \alpha \leq 270°$, en $5\cos\beta = 4$, met $180° \leq \beta \leq 360°$,
Bereken met die hulp van 'n skets die waarde van:

a) $\tan\alpha$
b) $\sin 2\beta$
c) $\tan 2\beta$
d) $\cos(\alpha - \beta)$
e) $\sin(\alpha - \beta)$

AKTIWITIETE/

ASSESSERING

Clever	**Mind Action Series**	**Wiskunde vir die Klaskamer**	**Via Afrika Wiskunde**
Oef: 5.1 & 5.5 Bl.: 111 & 118	Oef: 1 & 8 Bl.: 143 & 164	Oef: 5.5 & 5.8 Bl.: 138 & 144	Oef:5.2 & 5.4 Bl.: 110 & 119

KONSOLIDASIE

SAAMGESTELDE HOEK: Identiteite

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

DUBBEL HOEKE

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$
$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$