



|  |  |  |
|--|--|--|
| VAK EN GRAAD   | Wiskunde Graad 10  |  |
| KWARTAAL 1   | Week 1: Algebraïese Uitdrukkings   |  |
| ONDERWERP  | Produkte en Faktorisering  |  |
| DOEL VAN LES   | Om produkte en faktorisering van graad 9 te hersien en gr 10 werk oor produkte en faktorisering in te lei.   |  |
| BRONNE   | <b>Papier bronne</b><br>Gaan asseblief na die gedeelte oor Algebraïese Uitdrukkings in jou Handboek.   |  |
| INLEIDING  | In hierdie les wil ons die produk van tweeterme (binome) hersien waarmee jy reeds begin het in graad 9. Dit is is 'n baie belangrike vaardigheid regdeur Algebra en 'n aantal ander afdelings van die kurrikulum. Dan sal ons aangaan met die produk van 'n tweeterm (binoom) en 'n drieterm. Dit sal gevolg word deur hersiening van faktorisering wat gedoen was in graad 9.<br><b>Tweeterm (binoom):</b> 'n uitdrukking met TWEE terme. Onthou terme word geskei deur 'n "+" of "-" teken, bv. $2a + 5b$<br><b>Drietem (trinoom):</b> 'n uitdrukking met DRIE terme, bv $ax^2 + bx + c$ |  |
| KONSEPTE/ VAARDIGHEDE                                      | <b>Produkte:</b> Verander 'n produkuitdrukking (eenterm) na 'n somuitdrukking (veelterm)<br><b>Faktorisering:</b> Verander 'n somuitdrukking (veelterm) na 'n produkuitdrukking (eenterm)  |  |
| Les 1  | Produkte: <b>Hersiening van Gr 9 werk</b>  |  |
| <b>Distributiewe wet:</b>                                  | In 'n uitdrukking soos $a(b + c)$ , kan ons die $a$ "versprei" oor die terme in die hakie:<br>$a(b + c) = a(b) + a(c) = ab + ac$ : die distributiewe wet. Op dieselfde manier het ons:<br>$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$   |  |
| <b>1. Produk van 2 Tweeterme:</b>                          | $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$   |  |
| Voorbeeld 1: Vind die volgende produk: $(2a + 5b)(3a - b)$ |  |  |
| <b>Oplossing:</b> Metode 1:                                | Elke term in die een hakie moet vermenigvuldig word met elke term in tweede hakie: die distributiewe wet   |  |
| $= 2a(3a - b) + 5b(3a - b)$                                |  |  |
| $= 6a^2 - 2ab + 15ab - 5b^2$                               |  |  |
| $= 6a^2 + 13ab - 5b^2$                                     |  |  |
| Metode 2: $(2a + 5b)(3a - b)$                              | Metode 2 word ook gereeld na verwys as die <b>EBBA</b> . Dit is 'n akroniem vir die vermenigvuldiging van:   |  |
| <b>Eerstes:</b> $2a \times 3a$                             | <b>Eerstes</b> (elke eerste term)  |  |
| <b>Buitenstes:</b> $2a \times (-b)$                        | <b>Buitenstes</b> (die buitenste 2 terme)  |  |
| <b>Binnestes:</b> $5b \times 3a$                           | <b>Binnestes</b> (die binneste 2 terme)  |  |
| <b>Agterstes:</b> $5b \times (-b)$                         | <b>Agterstes</b> (die laaste 2 terme).   |  |
| $\therefore (2a + 5b)(3a - b) = 6a^2 - 2ab + 15ab - 5b^2$  |  |  |
| $= 6a^2 + 13ab - 5b^2$                                     |  |  |
| <b>KAN JY?</b>   |  |  |
| <b>Oefening 1:</b>   | Vind die volgende produkte:  |  |
| 1. $5a(a + b) - 3(a^2 - ab)$                               |  |  |
| 2. $a^3(a^2 + 5a - 6)$                                     |  |  |
| 3. $\frac{1}{p}(p^2 - 2p + \frac{3}{p})$                   |  |  |
| 4. $(2a + 5)(2a - 1)$                                      |  |  |
| 5. $(2a - 5)(2a - 1)$                                      |  |  |
| 6. $(3x - 5y)(2x + 3y)$                                    |  |  |
| 7. $(5a + \frac{2}{5}b)(a - \frac{1}{5}b)$                 |  |  |
| Antwoorde:   |  |  |
| 1. $2a^2 + 8ab$  |  |  |
| 2. $a^5 + 5a^4 - 6a^3$                                     |  |  |
| 3. $p - 2 + \frac{3}{p^2}$                                 |  |  |
| 4. $4a^2 + 8a - 5$   |  |  |
| 5. $4a^2 - 12a + 5$  |  |  |
| 6. $6x^2 - xy - 15y^2$                                     |  |  |
| 7. $5a^2 - \frac{3}{5}ab - \frac{2}{25}b^2$                |  |  |

## 2. Speciale geval: Produkte wat lei tot die verskil tussen twee vierkante(kwadrate):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Voorbeeld 2: Vind die volgende produk:  $(2x + 3)(2x - 3)$

**Oplossing:** As ons EBBA toepas:  $(2x + 3)(2x - 3)$

$$= (2x)(2x) + 2x(-3) + 3(2x) + 3(-3)$$
$$= 4x^2 - 6x + 6x - 9$$
$$= 4x^2 - 9$$

**Inspeksie:** As die terme in die 2 hakies dieselfde is met net die tekens wat verskil, is die antwoord:

$$(1^{\text{ste}} \text{ term})^2 - (2^{\text{de}} \text{ term})^2$$

Voorbeeld 3:  $(3a^2b + \frac{1}{2}xy^3)(3a^2b - \frac{1}{2}xy^3)$

$$= (3a^2b)^2 - \left(\frac{1}{2}xy^3\right)^2$$
$$= 9a^4b^2 - \frac{1}{4}x^2y^6$$

## 3. Kwadraat van 'n tweeterm (binoom): $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Voorbeeld 4: Vind die volgende produk:

$$(x + 3y)^2$$
$$= (x + 3y)(x + 3y)$$
$$= x^2 + 3xy + 3xy + 9y^2$$
$$= x^2 + 6xy + 9y^2$$

**Inspeksie:** Om 'n tweeterm (binoom) te kwadreer:

$$(1^{\text{ste}} \text{ term})^2 + [2 \times (1^{\text{ste}} \text{ term}) \times (2^{\text{de}} \text{ term})] + (2^{\text{de}} \text{ term})^2$$

Voorbeeld 5: Bepaal die volgende produk:

$$(3ax - 2y)^2$$

$$= 9a^2x^2 - 2(3ax \cdot 2y) + 4y^2 = 9a^2x^2 - 12axy + 4y^2$$

## Oefening 2:

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings: (gebruik **Inspeksie** so ver as moontlik)

- $(2a + 5)(2a - 5)$
- $(x - 6y^2)(x + 6y^2)$
- $(x^2a - \frac{1}{3}y^3b)(x^2a + \frac{1}{3}y^3b)$
- $(x - y - z)(x - y + z)$
- $(2a - 5)^2$
- $(2a + 5)^2$
- $(-x - 3)^2$
- $(x^{\frac{1}{2}} - 9y)^2$
- $[2(x + 3y)]^2$
- $2(3x + y)^2 - 3(x + 2y)(x - 2y)$

Antwoorde:

- $4a^2 - 25$
- $x^2 - 36y^4$
- $x^4a^2 - \frac{1}{9}y^6b^2$
- $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$
- $4a^2 - 20a + 25$
- $4a^2 + 20a + 25$
- $x^2 + 6x + 9$
- $x - 18x^{\frac{1}{2}}y + 81y^2$
- $4x^2 + 24xy + 36y^2$
- $15x^2 + 12xy + 4y^2$

## 4. Produk van 'n tweeterm (binoom) en 'n drieterm:

**Drieterm:** Is 'n uitdrukking met drie terme, e.g.  $2a + 5b - 3c$

Voorbeeld 1:  $(3x - 2y)(9x^2 - 6xy + 5y^2)$

**Oplossing:**  $(3x - 2y)(9x^2 - 6xy + 5y^2)$

$$= 3x(9x^2 - 6xy + 5y^2) - 2y(9x^2 - 6xy + 5y^2)$$

$$= 27x^3 - 18x^2y + 15xy^2 - 18x^2y + 12xy^2 - 10y^3$$

$$= 27x^3 - 36x^2y + 27xy^2 - 10y^3$$

Elke term in die een hakie moet met elke term in die tweede hakie vermenigvuldig word: *die distributiewe wet.*

**Produkte wat lei tot die som/ verskil tussen 2 kubieke/ 3de magte**

Kubiek: getal verhef tot die 3de mag, bv.  $x^3$  ( $x$  kubiek of  $x$  tot die 3de mag)

Voorbeeld 1:  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

$$= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8$$

$$= x^3 + 8$$

**Inspeksie:** As ons 'n tweeterm en 'n drieterm met die volgende eienskappe vermenigvuldig, is  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$  : som van 2 kubieke

Voorbeeld 2:  $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

$$= (2x)^3 + 3^3$$

$$= 8x^3 + 27$$

**Inspeksie:** As ons 'n tweeterm en 'n drieterm met die volgende eienskappe vermenigvuldig, is  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$  : verskil van 2 kubieke

Voorbeeld 3:  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$$= 8x^3 + 4x^2y + 2xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - y^3$$

Voorbeeld 4:  $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

$$= (2x)^3 - (3y)^3$$

$$= 8x^3 - 27y^3$$

## KAN JY?

Oefening 1:

Bepaal die volgende produkte:

- $(x - 1)(2x^2 + x - 1)$
- $(x + 3y)(x^2 + 4xy + 9y^2)$
- $(3s + 2t)(6s^2 - 4st + 3t^2)$
- $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$
- $(2a - 4b)(4a^2 + 8ab + 16b^2)$
- $(xy + 5)(x^2y^2 - 5xy + 25)$
- $(9x^2 + 3xy + y^2)(3x - y)$
- $(x - \frac{1}{x})(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2})$
- $(x^3 + 8)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Antwoorde:

- $2x^3 - x^2 - 2x + 1$
- $x^3 + 7x^2y + 21xy^2 + 27y^3$
- $18s^3 + st^2 + 6t^3$
- $x^3 + 27y^3$
- $8a^3 - 64b^3$
- $x^3y^3 + 125$
- $27x^3 - y^3$
- $x^3 - \frac{1}{x^3}$
- $x^6 - 64$

**Les 3****Gemengde produkte (Toets jou kennis)**

Hersiening Oefening: Vereenvoudig die volgende:

1.  $-3x(x^2 - 3x + 2)$
2.  $(2w - 1)(2w + 3)$
3.  $(6m - 8p)(8p + 6m)$
4.  $(3p - 1)^2$
5.  $(x + 2)(x^2 - 3x + 2)$
6.  $(3x + 2)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$

Toets:

Vereenvoudig die volgende produkte:

1.  $2x(-x^2 + 3x - 2)$  (3)
2.  $(3w + 7)(3w - 4)$  (3)
3.  $(4p - q)^2$  (3)
4.  $(5v - 3g)(3g + 5v)$  (2)
5.  $(3x + 1)(x^2 - 3x - 1)$  (4)
6.  $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$  (2)
7.  $(2p - q)(2p - 5q) - (q + 3p)(q - 3p)$  (4)
8.  $(t - 4s)(t + 4s) + (3t - 4s)^2$  (4)

[25]

Antwoorde: Hersieningsoefening

1.  $-3x^3 + 9x^2 - 6x$
2.  $x^3 + 7x^2y + 21xy^2 + 27y^3$
3.  $18s^3 + st^2 + 6t^3$
4.  $x^3 + 27y^3$
5.  $8a^3 - 64b^3$
6.  $x^3y^3 + 125$
7.  $27x^3 - y^3$
8.  $x^3 - \frac{1}{x^3}$
9.  $x^6 - 64$

Antwoorde: Toets

1.  $-2x^3 - 6x^2 - 4x$
2.  $9w^2 + 9w - 28$
3.  $16p^2 - 8pq + q^2$
4.  $25v^2 - 9g^2$
5.  $3x^3 - 8x^2 - 6x - 1$
6.  $8x^3 - 27y^3$
7.  $13p^2 - 12pq + 4q^2$
8.  $10t^2 - 24ts$

## Les 4

## Faktoriserings: Hersiening van Gr 9 werk

Onthou: Faktoriserings is die omgekeerde van produkte – verander 'n somuitdrukking (veelterm) na 'n produkuitdrukking (eenterm)

1. **Gemene Faktor (GF):**  $ab + ac = a(b + c)$  OR  $a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$

Haal uit die Gemene faktor. Deel GF in elke term om ander faktore te kry - skryf hierdie in 'n hakie

Faktoriseer die volgende volledig:

Voorbeeld 1:  $2x + 2y$   
 $= 2(x + y)$

Voorbeeld 2:  $2x^2 + 4x - 3x^3$   
 $= x(2x + 4 - 3x^2)$

Voorbeeld 3:  $25a^4b^4 + 15ab^2 - 10a^2b^3$   
 $= 5ab^2(5a^3b^2 + 3 - 2ab)$

GGF van 25, 15 en 10 is 5; GF van veranderlikes is **kleinste mag** van die veranderlike indien dit in elke term voor kom.

Voorbeeld 4:  $2x(x + 2y) - 3(x + 2y)$   
 $= (x + 2y)(2x - 3)$

GF is 'n uitdrukking  $(x + 2y)$ .  $(x + 2y)$  en  $(2x - 3)$  word die **faktore** van die uitdrukking genoem.

Voorbeeld 5:  $3(2y - x) - 5x(x - 2y)$   
 $= 3(2y - x) + 5x(2y - x)$   
 $= (2y - x)(3 + 5x)$

Verandering van teken om GF  $(2y - x)$  te kry

2. **Verskil van 2 vierkante (kwadrate) (VVTV):**  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Voorbeeld 6:  $x^2 - b^2$   
 $= (x + b)(x - b)$

VVTV: 2 hakies;  $(\sqrt{\text{term1}} + \sqrt{\text{term2}})(\sqrt{\text{term1}} - \sqrt{\text{term2}})$

Voorbeeld 7:  $27y^3 - 3x^2y$   
 $= 3y(9y^2 - x^2)$   
 $= 3y(3y + x)(3y - x)$

Kyk altyd eers vir GF

- Daar is **geen** Reële faktore vir die **Som van 2 vierkante** nie, bv.  $x^4 + 4$  is in sy eenvoudigste vorm.
- Om te bepaal of jou faktore korrek is, kan jy altyd die produk weer rofweg uitwerk.

## KAN JY?

Faktoriseer volledig:

1.  $4ax + 2bx - 6cx$
2.  $12xy^2 + 4xy - 3x^3y^2$
3.  $t^2(4 - t) + 4(4 - t)$
4.  $10b(x - y) + 5(x - y)$
5.  $2a(3a + b) - 5b(3a + b)$
6.  $x(a - 3) - 2(3 - a)$
7.  $81x^2 - 36$
8.  $x^4 - x^2$
9.  $12a^3 - 75ax^2$
10.  $-a^4 + 16$
11.  $\frac{1}{4}b^2 - \frac{49}{16}$
12.  $(a + x)^2 - y^2$
13.  $4(2a - 3) + 36x^2(3 - 2a)$
14.  $(x - 3)^2 - (x - 3)(x + 3)$
15.  $(x - 1)(3x - 1) + (-9x^2 + 1)$

Antwoorde:

1.  $2x(2a + b - 3c)$
2.  $xy(12y + 4 - 3x^2y)$
3.  $(4 - t)(t^2 + 4)$
4.  $5(x - y)(2b + 1)$
5.  $(3a + b)(2a - 5b)$
6.  $(a - 3)(x + 2)$
7.  $9(3x - 2)(3x + 2)$
8.  $x^2(x + 1)(x - 1)$
9.  $3a(2a - 5x)(2a + 5x)$
10.  $(4 + a^2)(2 + a)(2 - a)$
11.  $\frac{1}{4}\left(b + \frac{7}{2}\right)\left(b - \frac{7}{2}\right)$
12.  $(a + x + y)(a + x - y)$
13.  $(2a - 3)(2 - 6x)(2 + 6x)$
14.  $-6(x - 3)$
15.  $-2(3x - 1)(x + 1)$

**Les 5**

**Gr 10: Faktoreer: 4 terme deur Groepering**

Hier werk ons met 4 terme, soos die naam aandui.

Faktoreer volledig:

Voorbeeld 1:  $xw + zy + zw + xy$   
 Oplossing:  $= (xw + zw) + (zy + xy)$   
 $= w(x + z) + y(z + x)$   
 $= (x + z)(w + y)$

**OF**

$xw + zy + zw + xy$   
 Oplossing:  $= (xw + xy) + (zy + zw)$   
 $= x(w + y) + z(y + w)$   
 $= (w + y)(x + z)$

- Groepeer terme in pare, sodat elke paar 'n **gemene faktor** (GF) bevat, en verkieslik met 'n + teken tussen die pare.
- Haal GF uit in elke paar (pas tekenverandering toe waar nodig) en gaan aan soos met GF as 'n uitdrukking.

- Antwoorde behoort dieselfde te wees as elke paar 'n GF bevat
- LET WEL:  $(w + y)$  is dieselfde as  $(y + w)$

Voorbeeld 2:  $3ax - 3ay + x - y$   
 $= (3ax - 3ay) + (x - y)$   
 $= 3a(x - y) + (x - y)$   
 $= (x - y)(3a + 1)$

LET WEL: koëffisiënt van  $(x - y)$  is +1

Voorbeeld 3:  $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$   
 $= (x^3 + 2x^2) + (-4x - 8)$   
 $= x^2(x + 2) - 4(x + 2)$   
 $= (x + 2)(x^2 - 4)$   
 $= (x + 2)(x + 2)(x - 2)$   
 $= (x + 2)^2(x - 2)$

**OF**

$= (x^3 - 4x) + (2x^2 - 8)$   
 $= x(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4)$   
 $= (x^2 - 4)(x + 2)$   
 $= (x + 2)(x - 2)(x + 2)$   
 $= (x + 2)^2(x - 2)$

$(x^2 - 4)$  kan nog verder gefaktoreer word

**KAN JY?**

Faktoreer volledig:

1.  $tx - ty + rx - ry$
2.  $by - ax + bx - ay$
3.  $3a^2 - ax + 6ab - 2bx$
4.  $x^3 + 3x^2 - x - 3$
5.  $2a - 1 - 2ab + b$
6.  $6x^2 - ay - 2ax + 3xy$
7.  $4a^2 - 4b^2 - b^3 + a^2b$
8.  $6x^2 - x^5 - 6 + x^3$
9.  $x^4 - x^2 - x^2y^2 + y^2$
10.  $x^3 + y^3 + x + y$

Antwoorde:

1.  $(x - y)(t + r)$
2.  $(b - a)(y + x)$
3.  $(3a - x)(a + 2b)$
4.  $(x + 3)(x - 1)(x + 1)$
5.  $(2a - 1)(1 - b)$
6.  $(3x - a)(2x + y)$
7.  $(a - b)(a + b)(4 + b)$
8.  $(x + 1)(x - 1)(6 - x^3)$
9.  $(x + 1)(x - 1)(x + y)(x - y)$
10.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

|              |   |  |
|--------------|---|--|
| AKTIWITEITE  | <i>Werk deur ander oefeninge in jou Wiskunde Handboek</i>   |  |
| KONSOLIDASIE | <b>PRODUKTE</b>   | <b>FAKTORISERING</b>   |
|              | <p>Tweeterm (Binoom): uitdrukking met 2 terme: <math>a + b</math> of <math>ax + c</math><br/> Drieterm: uitdrukking met 3 terme: <math>a + b + c</math> of <math>ax^2 + bx + c</math></p> <p>Distributiewe wet: <math>a(b + c) = a(b) + a(c) = ab + ac</math></p> <p>Produk van 2 tweeterme:<br/> <math>(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd</math></p> <p>Produkte wat tot die verskil van 2 vierkante (kwadrate) lei:<br/> <math>(a + b)(a - b) = a^2 - b^2</math></p> <p>Kwadraat van 'n tweeterm (binoom): <math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math></p> <p>Som van 3de magte (kubieke):<br/> <math>(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3</math></p> <p>Verskil van 3de magte (kubieke):<br/> <math>(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3</math></p> | <p>Gemene Faktor (GF):<br/> <math>ab + ac = a(b + c)</math> <b>OR</b><br/> <math>a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)</math></p> <p>Verskil van 2 vierkante (kwadrate) (VVTV):<br/> <math>a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)</math></p> <p>4 terme deur Groepering:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Groepeer terme in pare, sodat elke paar 'n <b>gemene faktor</b> (GF) bevat, en verkieslik met 'n + teken tussen die pare.</li> <li>○ Haal GF uit in elke paar (pas tekenverandering toe waar nodig) en gaan aan soos met GF as 'n uitdrukking.</li> </ul> |
| WAARDES      | <i>Liewe leerder. Dit is belangrik om te oefen om vol te hou (volhard). Moenie tou opgooi voordat jy nie by die regte antwoord uitgekom het nie. Werk daaglik aan jou Wiskunde. Oefen hierdie vaardighede om jou instaat te stel om dit vinnig in 'n Toets of Eksamen te kan doen.</i>  |  |