VAK en GRAAD	WISKUNDE GR 10
KWARTAAL 2	Week 3
ONDERWERP	FUNKSIES – DIE PARABOOL $y = ax^2 + q$
DOEL VAN DIE LES	Om die volgende te doen

- Inleiding tot die vorm van grafiek, standaard vorm van die vergelyking van parabool, en die effek van "a" en "q".
- Skets die parabool met behulp van parameters.
- Bepaling van die Gebied en terrain van die parabool.
- Bepaal die vergelykings van die parabool as die skets gegee is.

	Papier gebaseerde Hulpbronne	*Digitale hulpbronne*
HULPBRONNE	*Gebruik jou handbook en blaai na die hoofstuk oor Funksies en spesefiek die gedeelte oor die Parabool*	https://bit.ly/3eAQEpW ; https://bit.ly/3btNnH2 https://bit.ly/3eFGWm7 ; https://bit.ly/2VXz6Mr

INLEIDING:

Liewe leerder in die gedeelte oor funksies en grafieke sal ons fokus op drie verkillende funksies naamlik die parabool, hiperbool en eksponentsiële funksie. In die les sal ons begin met die parabool.

In graad 9 het jy kennis gemaak met die reguit lyn. Die standaard vorm van die reguit lyn is: $y = mx + c$

Op 'n spesifieke skets kan jy gegee word $y = 2x + 3$ en $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Inplaas van die funksies op die manier te skryf , kan ons die reguit lyne 'n naam gee byvoorbeeld die eerste is f en die tweede een is g. Ons kan dit skryf as, $f(x) = 2x + 3$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ wat genoem word funksionele notasie.

Voorbeeld 1:

Beskou die funksie $f(x) = x^2$,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

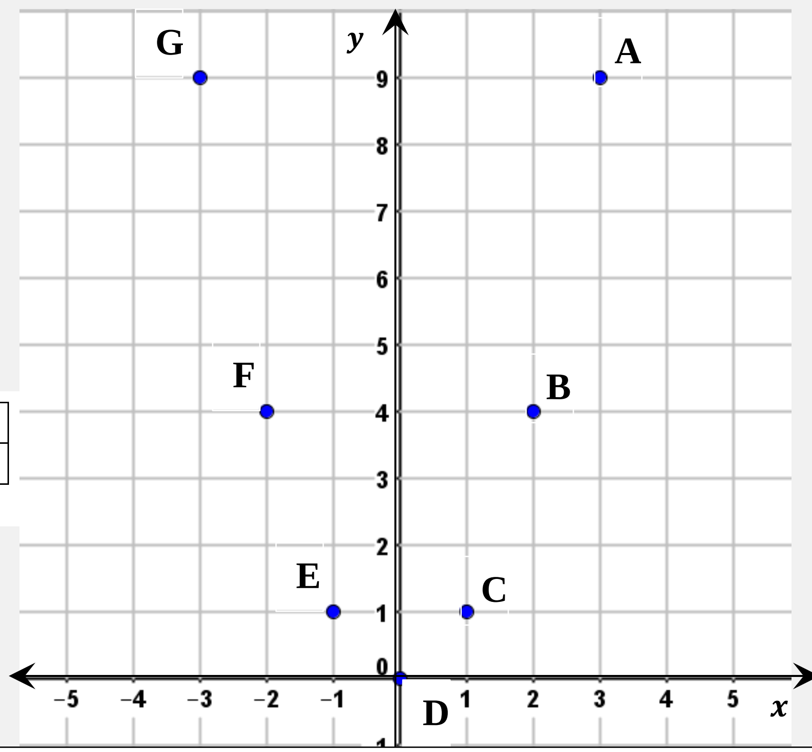
a) Voltooi die bostaande tabel.

b) Die punte is aangedui op die Kartesiese vlak. Probeer op jou eie en kyk , of jy saam stem daar meer.

Oplossing:

a)

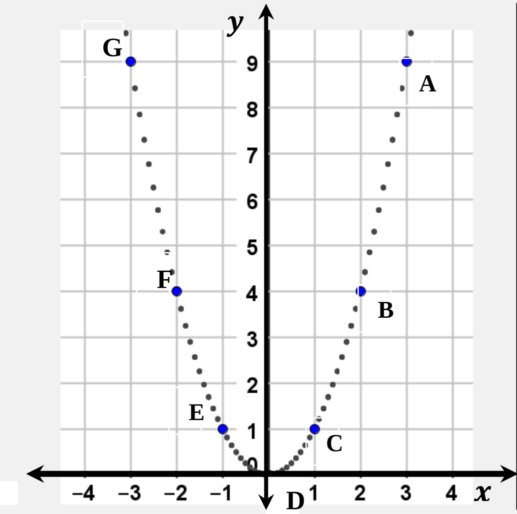
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



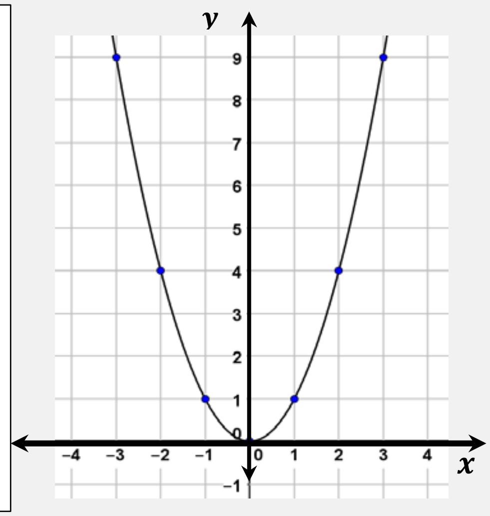
Nota:
$f(x)$ is die y-koördinaat van elke punt. Die punte word so benoem sodat dit makliker is om daarna te verwys. Die volgende is verkry van die tabel:
A(3; 9) , B(2; 4), C(3; 9) , D(0; 0), E(-1; 1), F(-2; 4) en G(-3; 9)

Hoe om A(3; 9) aan te dui op die Kartesiese vlak?

Begin by 3 op die x- as, beweeg nou 9 eenhede opwaarts met die y-as. Al die ander punte kan nou op dieselfde manier aangedui word.



Indien meer x-waardes geneem word en die ooreenkomstige y-waardes bereken word vir die funksie $f(x) = x^2$ en die punte word op die skets aangedui sal die beeld van die skets aan die linkerkant gevorm word.
Jy sal saamstem as meer en meer punte bereken en geteken word op die skets dan sal die skets op die regterkant gevorm word.



DEFINISIE VAN ‘N PARABOOL	‘n Grafiek van ‘n kwadratiese funksie d.w.s. $y = ax^2 + q$ waar q ‘n reële getal is en $a \neq 0$ word ‘n **parabool** genoem.

Kom ons ondersoek die effek van die waarde van die **parameters “a” en “q”** op die grafiek van die parabool. Dit wil sê as ‘n parabool gegee word hoe sal die verandering van die waarde van “a”en “q”, die oorspronklike grafiek verander.

Ondersoek die Effek van parameter “a”:

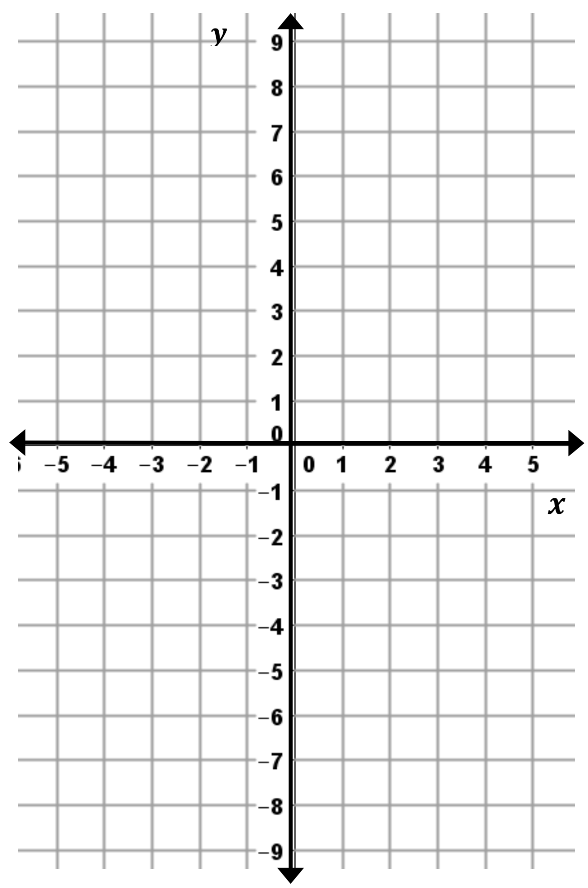
Beskou die funksies:

$f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $k(x) = -x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							
$h(x)$							
$k(x)$							

a) Voltooi die table hierbo.
b) Dui die punte aan van $f(x)$ op die Kartesiese vlak.
c) Verbind die punte aangedui in b).
d) Herhaal (b) & (c) vir funksies g, h en k
e) Wat kan jy aflei van die effek van “a" op die grafiek van die parabool?

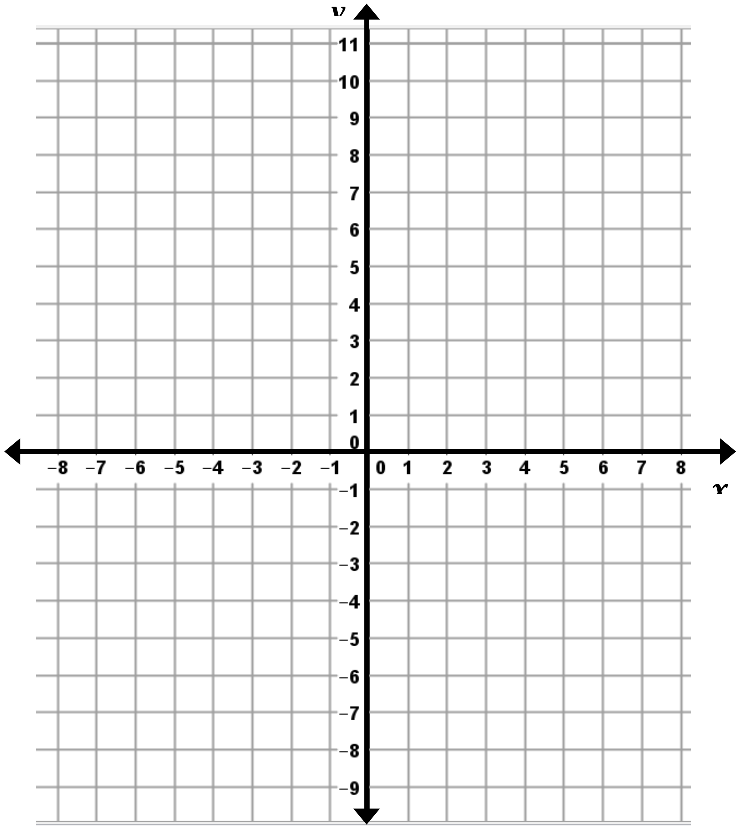
Vergelyk die grafieke van f , g, h en k en hoe hulle verander asook hoe die waarde van “a" die grafieke verander.



Ondersoek die Effek van parameter "q":

Beskou die funksies:

$f(x) = x^2$,
$m(x) = x^2 + 2$, en
$n(x) = x^2 - 2$



a) Voltooi die onderstaande tabel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$m(x)$							
$n(x)$							

b) Dui die punte aan op die Kartesiese vlak vir f .
c) Verbind die punte aangedui in b).
d) Herhaal (b) & (c) vir funksies m en n.
e) Wat kan jy aflei van die effek van "q" op die grafiek van die parabool?

Afleiding: In die vergelyking $\boldsymbol{y} = ax^2 + \boldsymbol{q}$			
As $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, d.w.s. as a positief is Dan het die grafiek 'n '**smiley face'** konkaaf opwaarts 	As $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, d.w.s. as a negatief is dan het die grafiek 'n **'sad face' ,** konkaaf afwaarts. 	As $\boldsymbol{q} > \mathbf{0}$, d.w.s. as q positief is Dan is q die aantal eenhede die funksie , $f(x) = x^2$ **opwaarts** skuif.	If $\boldsymbol{q} < \mathbf{0}$ d.w.s. as q negatief is Dan is q die aantal eenhede die funksie , $f(x) = x^2$ **afwaarts** skuif.

Terminologie:

Draaipunt Point: Die draaipunt van die parabool is die punt waar die parabool draai of van rigting verander. Die punt het 'n x-koördinaat en 'n y- koördinaat.

Simmetriese As: Die simmetriese as is 'n vertikale lyn, wat die parabool verdeel sodat die een helfte 'n spieëlbeeld is van die ander helfte . Die simmetriese as is die x- koördinaat van die draaipunt. In Graad 10 werk jy met die parabool met standaard vorm $y = ax^2 + \boldsymbol{q}$, die Parabool is simmetries om die $\boldsymbol{y}$ -as. Die vergelyking vir die simmetriese as vir die vorm van die parabool is, $x = 0$.

Minimum/Maksimum Waarde:
Die minimum waarde (as $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$) of maksimum waarde (**as** $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$) is die $\boldsymbol{y}$ - koördinaat van die Draaipunt.

***x* - afsnit:** Dit is waar die grafiek die x-as sny.

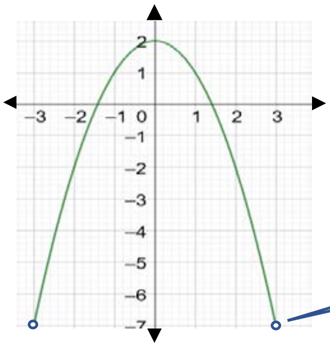
***y* - afsnit:** Dit is waar die grafiek die y-as sny.

Gebied is die stel van x-waardes waarvoor die grafiek of funksie gedefinieër is.

Terrein is die stel van y-waardes waarvoor die grafiek of funksie gedefinieër is.

Gebied en Terrein van 'n Funksie

Voorbeeld 2: Gegee



Skryf neer : a) Gebied

b) Terrein

a) Gebied: $-3 < x < 3$ of interval $x \in (-3; 3)$

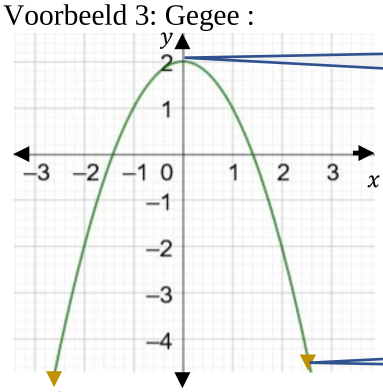
Gebied is alle x-waardes tussen -3 en 3, uitgesluit -3 en 3.

Omdat die parabool oop sirkels aan beide kante het, stop die grafiek net voor die -3 en 3. Die punte is nie ingesluit as punte op die grafiek nie.

b) Terrein: $-7 < y \leq 2$ of $y \in (-7; 2]$

--7 is nie ingeslote in die terrein van die funksie. Omdat -3 en 3 nie deel van die gebied van die funksie,is nie

Voorbeeld 3: Gegee :



Skryf neer : a) Gebied

b) Terrein

a) Terrein: $y \leq 2$ of $y \in (-\infty; 2]$

Neem kennis dat die maksimum waarde van die funksie is 2. D.w.s alle reële x-waardes sal 'n ooreenstemmende y-waarde kleiner as 2 het. Soos die grafiek oneindigend aanhou is die terrein van 2 tot $-\infty$.

b) Gebied: $-\infty < x < \infty$ of $x \in R$

Die pyltjie dui aan dat die grafiek aanhou verby die einde van die bladsy. Die funksie is gedefinieër vir alle reële waardes van x.

Skets van die Parabool:

Daar word van jou verwag om 'n parabool te skets deur van die parameters (a en q) gebruik te maak en nie van 'n tabel nie.

Wanneer jy 'n parabool skets, moet jy sorg dat daar genoeg inligting op die skets gegee word, sodat jy die vergelyking van die parabool sou kon bepaal, as dit nie gegee is nie.

Om die parabool te teken

1. Bepaal die vorm van die grafiek, as die vergelyking in die vorm, $y = ax^2 + q$ is ,weet jy dit is 'n parabool. Die teken van "a", bepaal of die parabool konkaaf na bo (smiley face) of konkaaf na onder (sad face) is.
2. Bepaal die x- afsnitte en y- afsnit. Sommige parabole het nie 'n x- afsnit nie, indien geen x- afsnit, bepaal die koördinate van enige ander punt op die grafiek en dui dit aan op die grafiek.
3. Bepaal die koördinate van die draaipunt. Die draaipunt vir, $y = ax^2 + q$ is (0; q). Die punt is ook die y-afsnit van hierdie parabool.

VOORBEELD 4

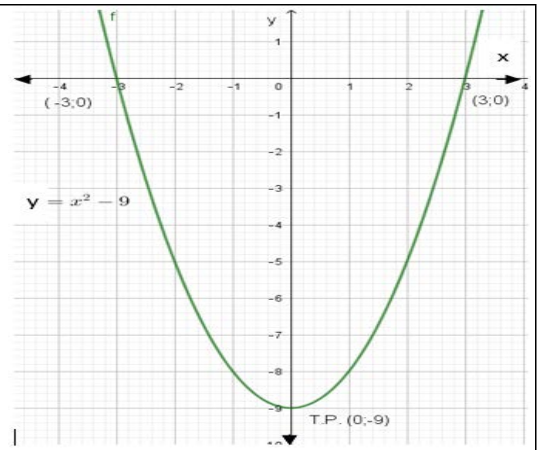
1. Skets die grafiek van $y = x^2 - 9$.

2. Skryf neer die :
2.1 gebied
2.2 terrein

3.1 Het die funksie 'n maksimum of minimum waarde?

3.2 Skryf neer die simmetriese as van die grafiek?

Oplossing:
1.**Vorm van diegrafiek** is: Konkaaf na bo
omdat $\boldsymbol{a > 0}$
& form of equation
Is $y = ax^2 + q$



***x*-afsnit**: laat $y = 0$

$0 = x^2 - 9$

$0 = (x-3)(x+3)$

$(x-3) = 0 \ of \ (x+3) = 0$

$x = 3 \quad of \quad x = -3$

$(-3; 0) \ en \quad (3; 0)$

***y*-afsnit**: laat $x = 0$

$y = (0)^2 - 9$

$y = -9 \ \therefore \ (0; -9)$

Draaipunt: (0; -9)

As 'n parabool gegee word in die vorm $\boldsymbol{y = ax^2 + q}$.

Dan is die **y-afsnit** & **Draaipunt** dieselfede punt.

Die punt: (0; q)

2.1 Gebied: $x \in R$

2.2 $-9 \le y < \infty$ of $y \in [-9; \infty)$

3.1 Minimum Waarde van -9

3.2 $x = 0$

OEFENING A : (Antwoorde op laste bladsy, verwys na dit, nadat jy dit gedoen het)

1. Teken die grafiek van $y = -x^2 + 16$ dui aan alle afsnitte met die asse.

2. Skryf neer die:

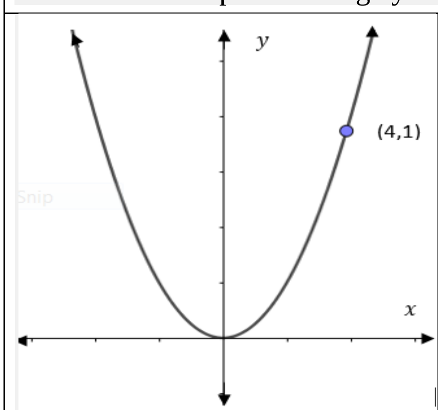
2.1 gebied 2.2 terrein

3.1 Het die funksie 'n maksimum of minimum waarde?
3.2 Skryf neer die simmetriese as van die grafiek?
3.3 Skryf neer die koördinate van die draaipunt?

Bepaal die vergelyking van'n parabool:

Om die vergelyking van die parabool te bepaal moet jy eers die waardes van a en q vir die vergelyking van $y = ax^2 + q$ bepaal.

Voorbeeld 5 Bepaal die vergelyking van die parabool hieronder.



Metode vir Oplossing

1. Identifiseer die y-afsnit (draaipunt), die y-koördinaat gee vir jou die waarde van q.
2. Om $\boldsymbol{a}$ te bepaal vervang die koördinate van die punt op die grafiek in die vergelyking.

Oplossing:

y-afsnit $(0; 0)$ $\therefore$ $q = 0$

$\therefore \ y = ax^2 + 0$

Vervang die punt $(4; 1)$ in $y = ax^2$

$\therefore \ 1 = a(4)^2$

$\therefore \ 1 = 16a$

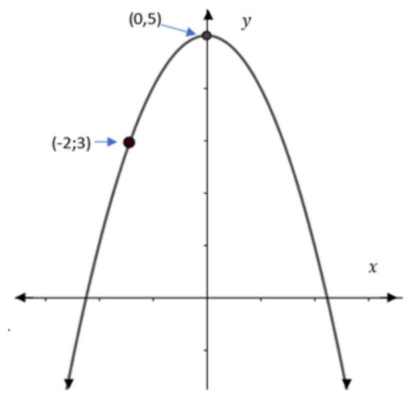
$(\div 16) \quad \therefore \ a = \frac{1}{16}$

Vervang $a = \frac{1}{16}$ en $q = 0$

In die standaard vorm van die vergelyking

$\therefore$ Die vergelyking is $y = \frac{1}{16}x^2$

Voorbeeld 6 Bepaal die vergelyking van die parabool wat deur die punte (0; 5) en (-2; 3) gaan.



Metode vir Oplossing

1. Identifiseer die y-afsnit (draaipunt), die y-koördinaat gee vir jou die waarde van q.
2. Om $\boldsymbol{a}$ te bepaal vervang die koördinate van die punt op die grafiek in die vergelyking.

Oplossing:

y – afsnit is (0; 5) $\therefore \quad q = 5$

Vervang $q = 5$ in $y = ax^2 + q$

$\therefore \quad y = ax^2 + 5$

Vervang die punt $(-2; 3)$ in $y = ax^2 + 5$

$\therefore \quad 3 = a(-2)^2 + 5$

$\therefore \quad 3 = 4a + 5$

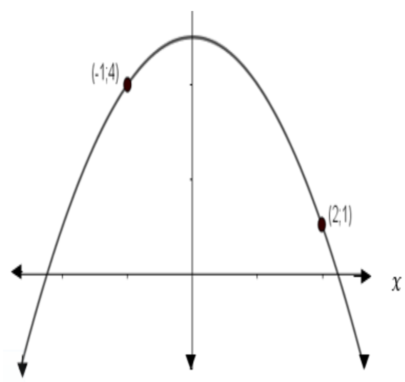
$\therefore \quad 4a = -2$

$\therefore \quad a = \frac{-1}{2}$

Vervang $a = \frac{-1}{2}$ en $q = 5$ in die standaard vorm van die vergelyking.

Die vergelyking is: $y = \frac{-1}{2}x^2 + 5$

Voorbeeld 7 Bepaal die vergelyking van die parabool wat deur die punte (-1; 4) en (2; 1) gaan.



Metode vir Oplossing

Ons kan nie vir $\boldsymbol{a}$ of $\boldsymbol{q}$ onmiddellik bepaal nie.

Om vir $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{q}$ te bepaal vervang ons elk van die twee punte (-1 ; 4) en (2 ; 1) in die vergelyking. $y = ax^2 + q$.

Jy sal nou twee vergelykings elk met twee onbekendes hê.

Los nou die twee linieëre vergelykings gelyktydig op om vir $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{q}$ te bepaal.

Vervang (-1; 4) in $4 = a(-1)^2 + q$

Vervang (2; 1) in $1 = a(2)^2 + q$ Ons benodig twee vergelykings om vir $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{q}$ te bepaal

$4 = 1a + q$ …………………(1)

$1 = 4a + q$ …………………(2)

Trek vergelyking nommer (2) vanaf vergelyking nommer (1)

$\therefore \quad 3 = -3a$

$\therefore \quad a = -1$

Vervange ($a = -1$) in vergelyking (1) of (2)

$4 = (-1)(-1)^2 + q$

$4 = -1(+1) + q$

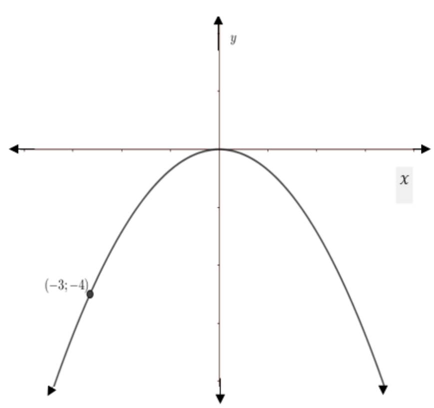
$4 = -1 + q$

$\therefore \quad q = 5$

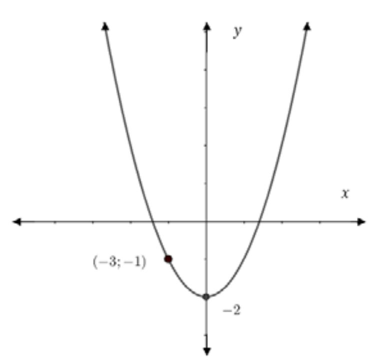
$\therefore$ Die vergelyking is $y = -x^2 + 5$

OEFENING B Bepaal die vergelykings van die volgende parabole hieronder

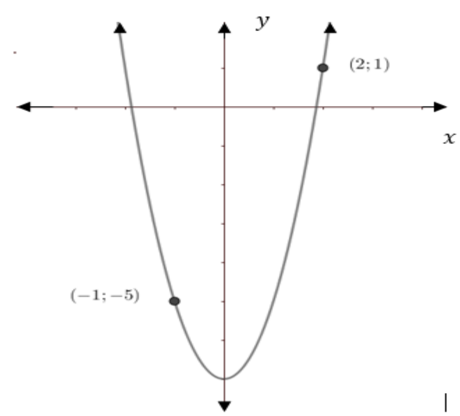
1. Die grafiek deur die punt (-3; -4)



2. Deur die punt -2 en (-3; -1)

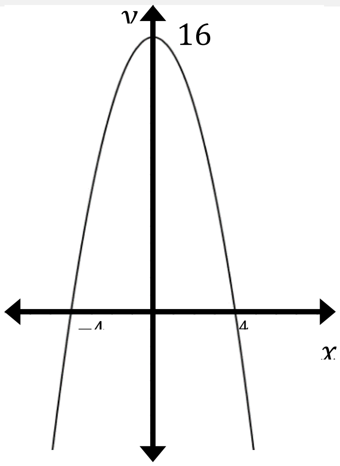


3 Deur die punte (2;1) en (-1; -5)



Oefening A: Antwoorde:

1.



2.1 Gebied: $x \in R$

2.2 $-\infty < y \leq 16$ of $y \in (-\infty;\ 16]$

3.1 Maksimum Waarde van 16

3.2 $x = 0$

3.3 Draaipunt (0; 16)

OEFENING B

Antwoorde:

1. $y = -\frac{4}{9}x^2$
2. $y = \frac{1}{9}x^2 - 2$
3. $y = 2x^2 - 7$

Opsomming:

1. As $a > 0$, dan is die parabool konkaaf opwaarts. As $a < 0$, dan is die parabool konkaaf afwaarts . As “a”, positief is vir twee verskillende parabole, dan is die parabool met die groter “a”, waarde meer nouer.
2. Die waarde van, “q”, dui aan die aantal eenhede die parabool opwaarts of afwaarts skuif vanaf die x as.
3. Om $y = ax^2 + q$ te skets , bepaal
   a) die vorm van die grafiek
   b) x-afsnit as dit een het
   c) Draaipunt wat (0; q) is
4. Om die vergelyking van ‘n parabool. $y = ax^2 + q$, te vind
   4.1 Jy kort twee stukkies inligting om vir “a” en “q” te bepaal.
   4.2 Draaipunt en y-afsnit is dieselfde punt, (0 ; q)
   4.3 Gebied: $x \in \Re$ en
   4.4 Terrein is $y \in (-\infty;\ q]$ as $a < 0$ of $y \in [q; \infty)$ as $a < 0$

OEFENINGE oor die Parabool

Siyavula

bladsye.185-188 Hoofstukke 5 Nr.2;6;10(b);
Gekombineerde probleme: bl.189 -190 Nr.’s 13

Mind Action Series Graad 10
bl 121, Oef. 2 a - g

Wiskunde vir die Klaskamer bladsye.142-178:
bl. 159 Oef. 8.1 Nr.1 & 2
bl.162 Oef .8.2 Nr.1; bl. 170 Oef. 8.3 Nr.1;
bl. 172 Oef. 8.4 Nr.1(b);2(b),3(b); bl.178 Oef. 8.5 Nr.1;3

Platinum Wisk: bl.133 Oef. 6 &7; Gekombineerde Oefening bl.141 Oef 11

Wiskunde Handboek en Werkboek
Bl.146 Oef. 9 Nr.1(b); bl. 149 Oef.10 Nr. 2; 3(c) &(f); bl.150 (a); (d); & (f)
Gekombineerde Oefening bl.161 -162 (a); (c); (e); (g)