VAK en GRAAD	WISKUNDE GR 10
KWARTAAL 2	Week 5
ONDERWERP	FUNKSIES – DIE EKSPONENSIËLE FUNKSIE, $y = ab^x + q, b > 0$ en $b \neq 1$
DOEL VAN DIE LES	Om:

- Jou bekend te stel aan die vorm, standaardvorm van die vergelyking en die invloed van a en q op die grafiek van die eksponensiële funksie.
- Die eksponensiële funksie te teken deur van die eienskappe daarvan gebruik te maak.
- Die Gebied (definisieversameling) en terrein (waardeversameling) van die eksponensiële funksie te bepaal.
- Die vergelyking van die eksponensiële funksie te bepaal as die grafiek gegee word.

HULPBRONNE	***Papier gebaseerde hulpbronne***	***Digitale hulpbronne***
	Gaan asseblief na die Hoofstuk oor Funksies en Grafieke en dan na die gedeelte oor die Eksponensiële funksie in jou Wiskunde Handboek.	https://www.youtube.com/watch?v=b-ugmG3UlAc https://www.youtube.com/watch?v=DASfP8KAyvs https://www.youtube.com/watch?v=tQdXVvcKyp8

INLEIDING:

- In die vorige lesse oor Funksies en Grafieke het jy geleer van die funksie-notasie, $f(x)$, en het ons gekyk na die grafieke van die Parabool en die Hiperbool en hulle eienskappe. In hierdie les ons wil fokus op die eksponensiële funksie.
- Ons noem die basiese funksies vir die parabool: $f(x) = x^2$ en die hiperbool: $f(x) = \frac{1}{x}$ die "moederfunksies". Op dieselfde manier is die moederfunksie vir die eksponensiële funksie: $f(x) = b^x$. Ons kan gebruik maak van hierdie funksies om enige ander grafiek van die parabool, hiperbool en eksponensiële funksie te teken, deur sekere transformasies op die moederfunksie uit te voer.
- Ons gaan die vorm en ander eienskappe van die eksponensiële funksie ondersoek deur punt-vir-punt af stipping van sommige grafieke.

Les 1a Eienskappe van eksponensiële funksie deur punt-vir-punt af stipping

Voorbeeld 1:

Beskou die funksie $f(x) = 2^x$. Voltooi die tabel hieronder en steek die punte op die Kartesiese vlak af.

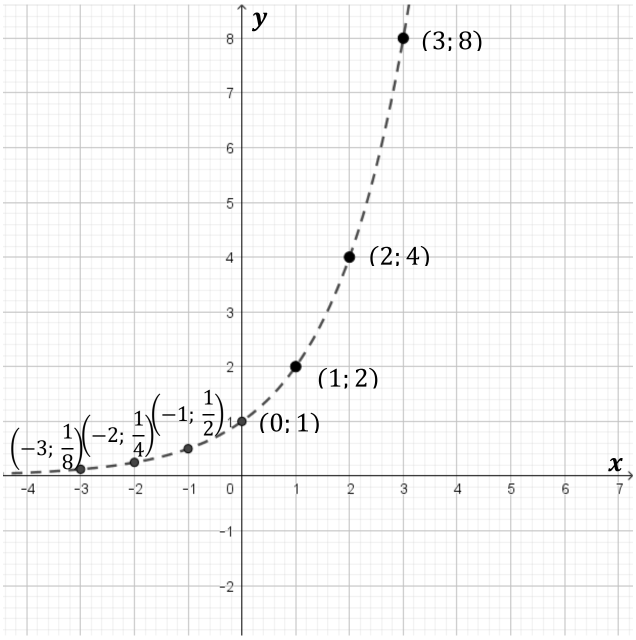
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

Wat sien ons?

- As ons die punte verbind, sien ons 'n grafiek wat **stygend** is: as die x −waardes toeneem, neem die y −waardes ook toe.
- As ons die x −waardes kleiner en kleiner maak, raak die y −waardes ook kleiner, maar sal nie $y = 0$ bereik nie, wat vir ons aandui dat $\boldsymbol{y = 0}$ 'n **asimptoot** van die grafiek is.
- Die **y-afsnit** is by $\boldsymbol{y = 1}$, omdat $2^0 = 1$

Oplossing:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Voorbeeld 2:

Beskou die funksie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Voltooi die tabel hieronder en steek die punte op die Kartesiese vlak af.

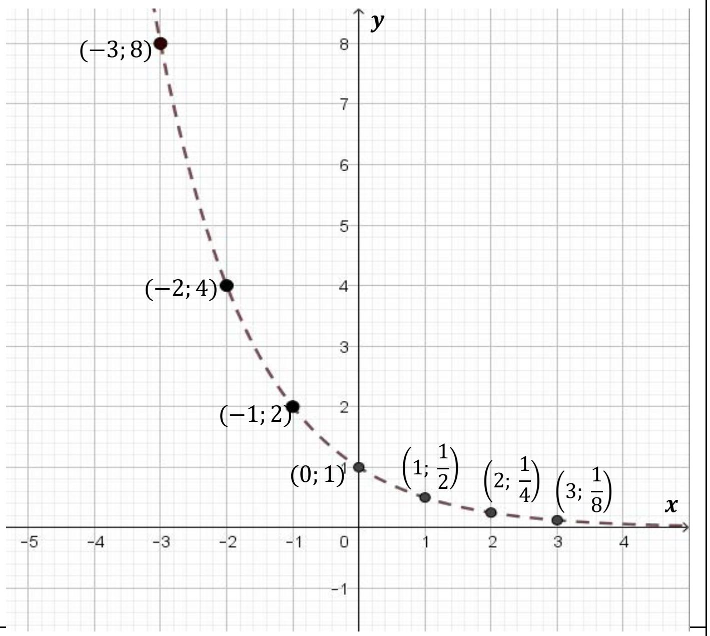
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

Wat sien ons?

- As ons die punte verbind, sien ons 'n grafiek wat **dalend** is: as die x −waardes toeneem, neem die y −waardes af.
- As ons die x −waardes groter en groter maak, word die y −waardes kleiner, maar sal nie $y = 0$ bereik nie, wat vir ons aandui dat $\boldsymbol{y = 0}$ 'n **asimptoot** van die grafiek is.
- Die $\boldsymbol{y}$**-afsnit** is by $\boldsymbol{y = 1}$, omdat $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

Oplossing:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



OPSOMMING:

Die grafiek van $f(x) = b^x$:

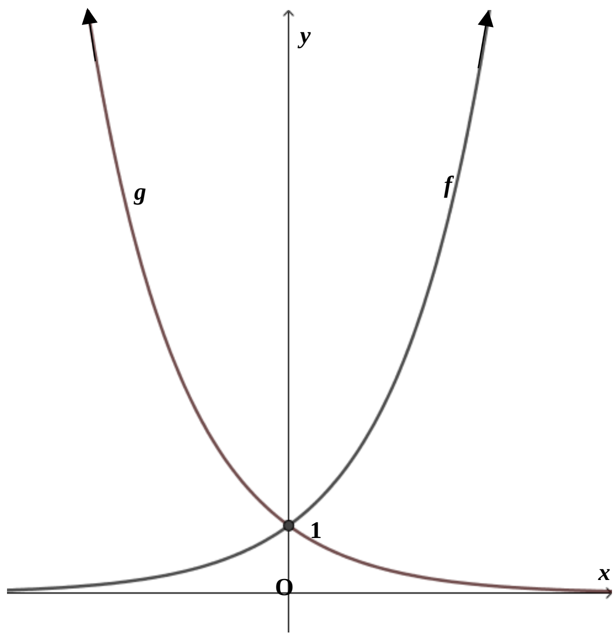
- As $\boldsymbol{b > 1}$, is die grafiek **stygend**
- As $\boldsymbol{0 < b < 1}$, ('n breuk) is die grafiek **dalend**
- $\boldsymbol{y = 0}$ is 'n **horisontale asimptoot** van die grafiek
- die $\boldsymbol{y}$**−afsnit** is $\boldsymbol{y = 1}$, omdat $b^0 = 1$
- daar is **geen** $\boldsymbol{x}$ **−afsnit** nie omdat daar geen plek is waar $y = 0$ nie.

NOTA: Hoekom beperk ons $\boldsymbol{b}$ deur $\boldsymbol{b > 1}$ of $\boldsymbol{0 < b < 1}$?

- As $b = 0$, dan is $y = 0^x = 0$, wat 'n reguitlyn is en nie 'n eksponensiële grafiek nie (L.W. 0^0 is ongedefinieerd)
- As $b = 1$, dan is $y = 1^x = 1$, wat ook 'n reguitlyn is en nie 'n eksponensiële grafiek nie.
- As $b < 0$, (negatief) bv. $y = (-2)^x$, dan het ons vir sommige waardes van x, y-waardes wat nie-reëel is nie, bv. $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ wat Nie-$\mathbb{R}$ is (jy sal meer hieroor in gr 11 leer)

In die diagram:

$f(x) = b^x, b > 1$ en $g(x) = b^x, 0 < b < 1$



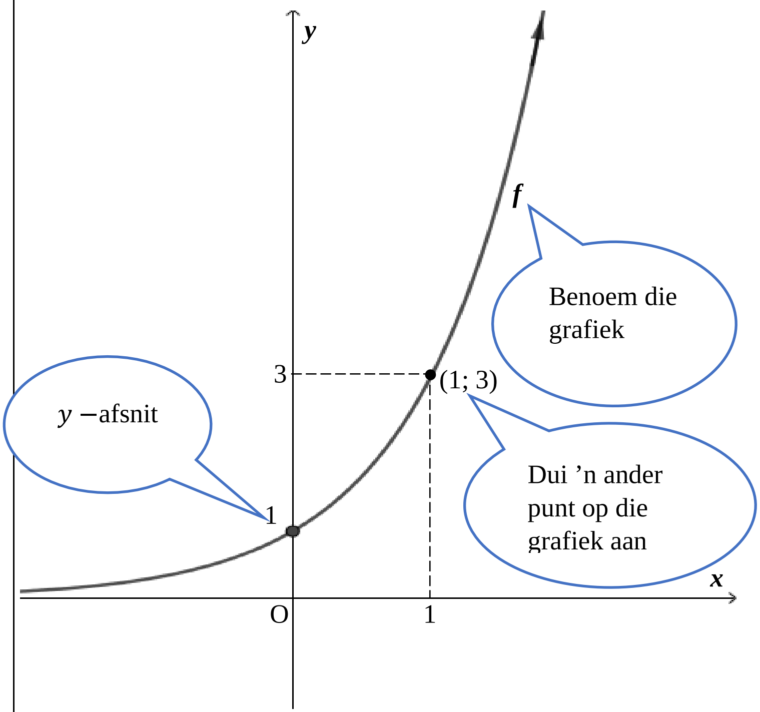
Hoe om die eksponensiële funksie te teken (sonder om 'n tabel te gebruik)

Voorbeeld 3:

Teken die grafiek van $f(x) = 3^x$ op die Kartesiese vlak

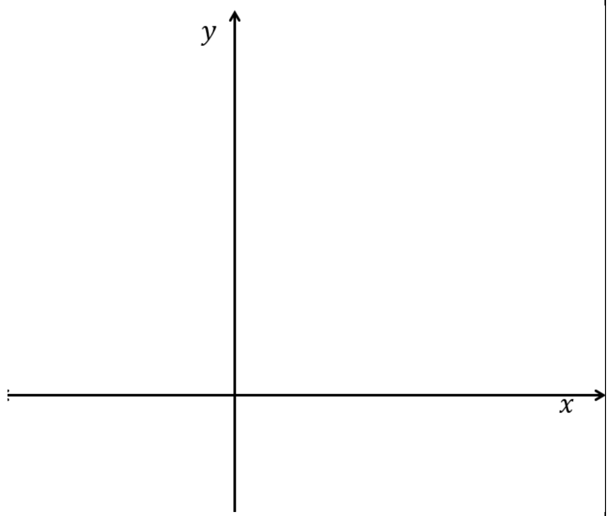
Oplossing:

- $\boldsymbol{b > 1}$, *so, die grafiek is* ***stygend.***
- *Teken 'n stygende eksponensiële grafiek*
- *$y-$afsnit is by $y = 1$*
- *Kies enige ander punt, sê bv. $x = 1$ en bereken die ooreenstemmende y-waarde deur substitusie $\Rightarrow y = 3$*
- *Steek die punt $(1;\ 3)$ af op die grafiek.*
- *Benoem die grafiek*

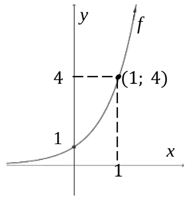


Kan jy?

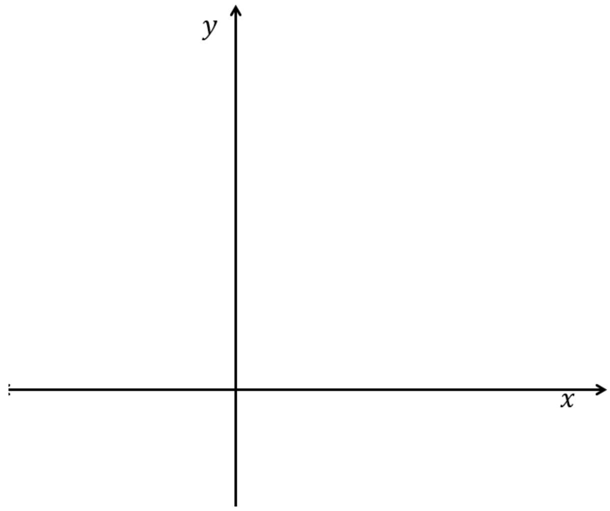
1. Teken die grafiek van $f(x) = 4^x$ op die Kartesiese vlak



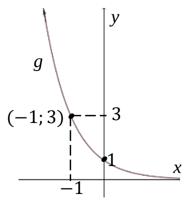
Oplossing:



2. Teken die grafiek van $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ op die Kartesiese vlak



Oplossing:



Les 1b | Teken die eksponensiële funksie $y = ab^x + q$ deur die eienskappe te gebruik; **die invloed van a** ($q = 0$)

Voorbeeld 4:

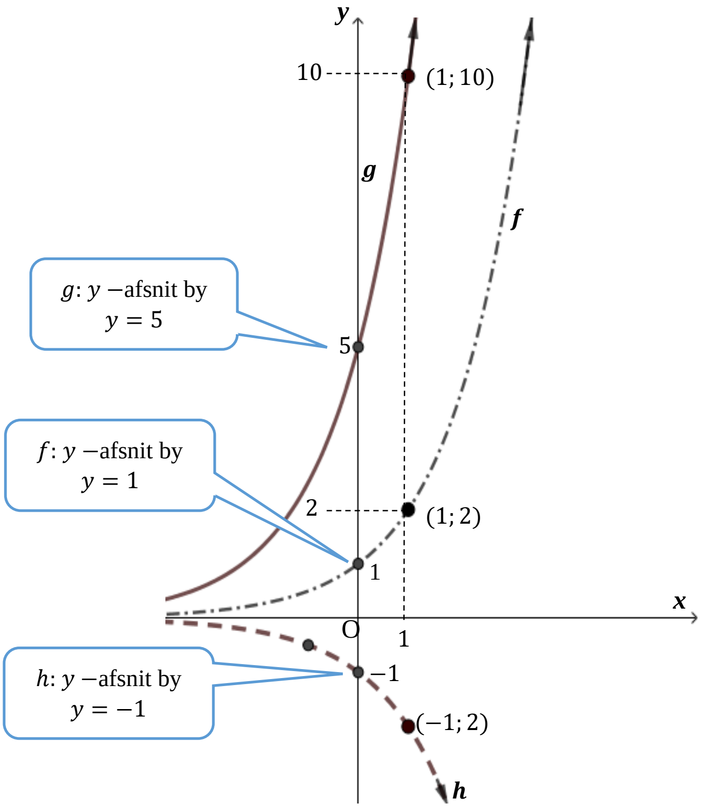
$a = 1$

Teken die grafiek van $f(x) = 2^x$ ('moeder funksie') en $g(x) = 5.2^x$ op dieselfde assestelsel. Teken ook $h(x) = -2^x$

$a = 5$

$a = -1$

Die grafieke sal só lyk:



Oplossing:

As ons gebruik maak van 'n tabel, vind ons die volgende:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	5	10	20
$h(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4

$-2^x \neq (-2)^x$
maar
$-2^x = (-1).2^x$

Al die y-waardes van f word vermenigvuldig met 5 om $g(x)$ te kry.

Ons sien:

- die grafieke het verskillende y **−afsnitte** (by $y = a$)
- die grafiek van g is **steiler** as f - hoe **groter** die waarde van a, hoe **steiler** die grafiek – dit is meer uitgerek opwaarts
- al die grafieke het $y = 0$ ($q = 0$) as **horisontale asimptoot**
- $f(x) = 2^x$ en $h(x) = -2^x$ is **refleksies** van mekaar in die x **−as** (horisontale asimptoot: $y = 0$)

Opsomming:

Vir die grafiek van $f(x) = a.b^x$

- is die y **−afsnit** by $y = a$
- hoe **groter** die waarde van a, hoe **steiler** (smaller) die grafiek
- die grafiek het $y = 0$ ($q = 0$) as **horisontale asimptoot**
- as $a < 0$, dan ons het 'n **refleksie** in die x **−as (horisontale asimptoot)**
- die **gebied (definisieversameling)** van f is: $x \in \mathbb{R}$, omdat die grafiek vir **ALLE** x −waardes bestaan
- die **terrein (waardeversameling)** van f is: $y > 0$ (as $a > 0$) omdat die grafiek slegs bestaan vir die y −waardes vanaf die asimptoot opwaarts (uitgesluit die asimptoot)

ONTHOU
Gebied: al die x **−waardes** waaroor die grafiek bestaan

ONTHOU
Terrein: al die y **−waardes** waaroor die grafiek bestaan

Voorbeeld 5:

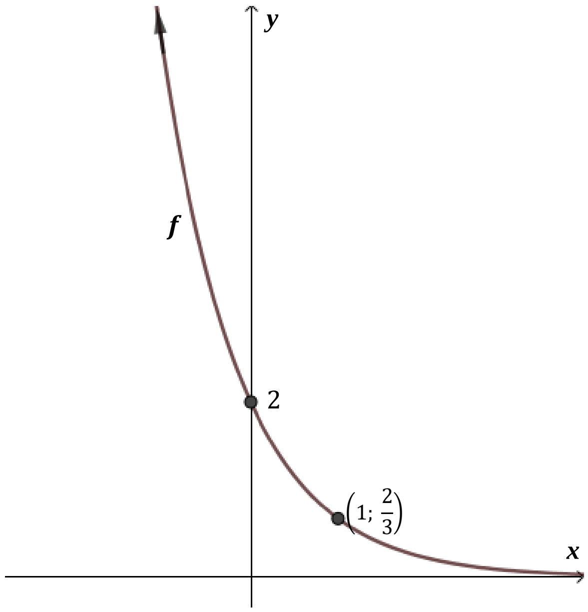
(a) Teken die grafiek van $f(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(b) Bepaal die gebied (definisieversameling) en die terrein (waardeversameling) van f

Oplossing:

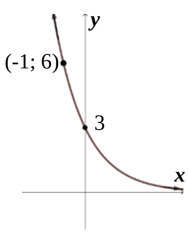
(a)

- $\mathbf{0 < b < 1}$, *so, die grafiek is* ***dalend.***
- *Teken 'n dalende eksponensiële grafiek*
- *$y-$afsnit is by $y = 2$*
- *Kies enige* ***ander punt****, sê bv. $x = 1$ en bereken die ooreenstemmende y-waarde deur substitusie $\Rightarrow y = \frac{2}{3}$*
- *Steek die punt $(1; \frac{2}{3})$ op die grafiek af*
- *Benoem die grafiek*

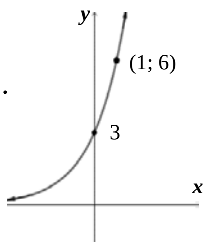


(b) Gebied: $x \in \mathbb{R}$
Terrein: $y > 0$

Oplossings: 1a)



2.



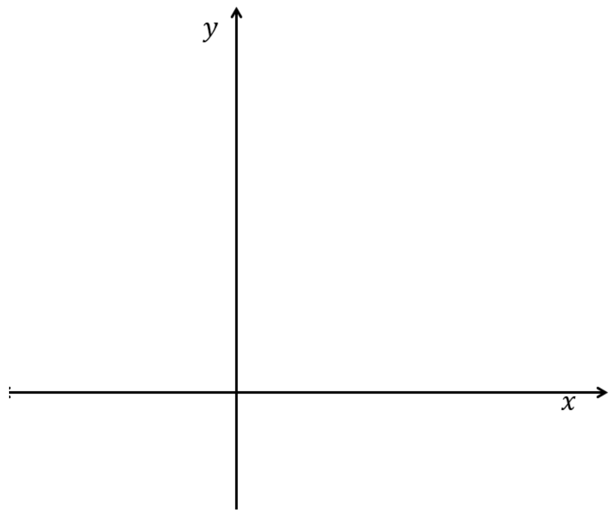
1b) Gebied: $x \in \mathbb{R}$
Terrein: $y > 0$

Kan jy?

1. (a) Teken die grafiek van $f(x) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x$
   (b) Wat is die gebied (definisieversameling) en terrein (waardeversameling) van f
   (c) Is die grafiek van f stygend of dalend?

Oplossing:

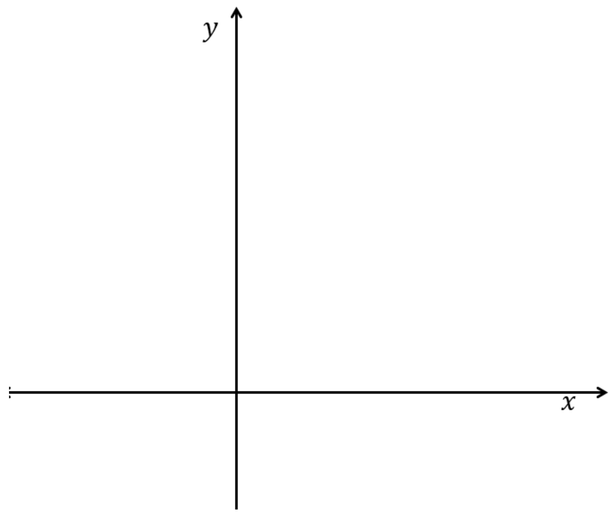
(a)



(b) gebied (definisieversameling):
terrein (waardeversameling):

2. Teken die grafiek van $g(x) = 3.2^x$

Oplossing:



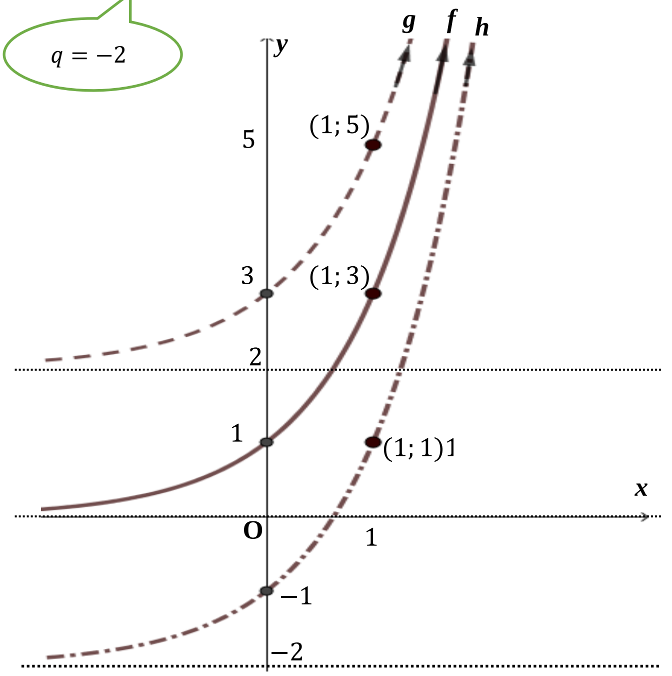
Les 1b	Teken die eksponensiële funksie $y = ab^x + q$ deur die eienskappe te gebruik; **die invloed van q**

Voorbeeld 6:

$q = 0$ $q = 2$

Teken die grafiek van $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 2$ en $h(x) = 3^x - 2$ op die dieselfde assestelsel

$q = -2$



Oplossing:

As ons gebruik maak van 'n tabel, vind ons die volgende:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{2}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\boldsymbol{g(x)}$	$2\frac{1}{9}$	$2\frac{1}{3}$	3	5	11
$\boldsymbol{h(x)}$	$-1\frac{8}{9}$	$-1\frac{2}{3}$	-1	1	7

$3^{-1} - 2 = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$

Wat sien ons?

- Al die grafieke is stygend, omdat $b > 1$
- f het 'n horisontale asimptoot by $y = 0$ $(q = 0)$
- g het 'n horisontale asimptoot by $y = 2$ $(q = 2)$
- h het 'n horisontale asimptoot by $y = -2$ $(q = -2)$
- die 'moederfunksie' f het 'n y −afsnit by $y = 1$
- die y −afsnit van g is by $y = 3$; die 'moederfunksie' het 2 eenhede opwaarts geskuif $(q = 2)$
- die y −afsnit van h is by $y = -1$; die 'moederfunksie' het 2 eenhede afwaarts geskuif $(q = -2)$
- die gebied (definisieversameling) van AL die grafieke is $x \in \mathbb{R}$
- die terrein (waardeversameling) van f is $y > 0$ (asimptoot by $y = 0$);
- die terrein (waardeversameling) van g is $y > 2$ (asimptoot by $y = 2$)
- en die terrein (waardeversameling) van h is $y > -2$ (asimptoot by $y = -2$)

Oor die algemeen:

As $f(x) = a.b^x + q$ waar $b > 1$ of $0 < b < 1$, dan:

- Is f **stygend** as $\boldsymbol{b > 1}$ en **dalend** as $\boldsymbol{0 < b < 1}$
- Het f 'n horisontale **asimptoot** by $\boldsymbol{y = q}$
- Is die $\boldsymbol{y}$ **−afsnit** by $\boldsymbol{y = a + q}$ OF bepaal y deur $x = 0$ te stel.
- Kan die $\boldsymbol{x}$ **−afsnit** (indien enige) bepaal word deur $\boldsymbol{y = 0}$ op te los.
- Kan die grafiek van $y = a.b^x + q$ verkry word van die grafiek van die **'moederfunksie'** $y = b^x$ deur sekere transformasies daarop toe te pas.
- Is die **gebied (definisieversameling)** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
- Is die **terrein (waardeversameling)** $\boldsymbol{y > q}$ (as $a > 0$)

Voorbeeld 7:

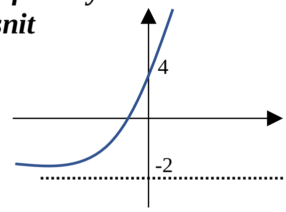
$a = 6; b = 3; q = -2$

Gegee $f(x) = 6.3^x - 2$

(a) Bepaal die afsnitte van f met die asse.
(b) Gee die vergelyking van die horisontale asimptoot.
(c) Teken die grafiek van f
(d) Gee die gebied (definisieversameling) en terrein (waardeversameling) van f

Oplossing:

Ons kan 'n rowwe skets van f maak deur net na die y -afsnit en asimptoot te kyk; ***omdat b>1 sal die grafiek stygend wees; asimptoot is by y = -2 en y-afsnit by $y = 4$ $(6-2)$ ⇒ daar is 'n x-afsnit***



(a) $\boldsymbol{y}$ **−afsnit**: $\boldsymbol{y} = a + q = 6 - 2 = \mathbf{4}$

OF: Stel $x = 0$ $\therefore y = 6.3^0 - 2 = 6.1 - 2 = 4$

$\boldsymbol{x}$ **−afsnit**:Stel $y = 0$ $\therefore 0 = 6.3^x - 2$

$\therefore 2 = 6.3^x$

$\therefore \frac{2}{6} = 3^x = \frac{1}{3}$

$\therefore 3^x = 3^{-1}$

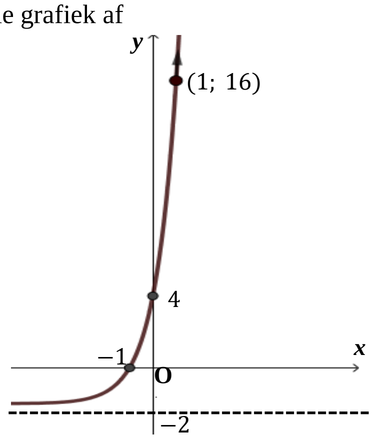
$\therefore \boldsymbol{x} = \mathbf{-1}$

(b) **Asimptoot**: $y = q$ $\therefore \boldsymbol{y} = \mathbf{-2}$

(c) grafiek

- teken eers die asimptoot;
- teken nou 'n stygende eksponensiële grafiek ($b > 1$) wat deur $y = 4$ en $x = -1$ gaan;
- kies enige ander punt, sê $x = 1$ en bepaal die ooreenstemmende y −waarde ⇒ $y = 6.3^1 - 2 = 16$
- Steek die punt (1; 16) op die grafiek af
- Benoem die grafiek

Die grafiek sal só lyk:



Kan jy?

Gegee $f(x) = 2.4^x + 2$

(a) Bepaal die afsnitte van f met die asse.
(b) Gee die vergelyking van die horisontale asimptoot.
(c) Teken die grafiek van f
(d) Gee die gebied (definisieversameling) en terrein (waardeversameling) van f

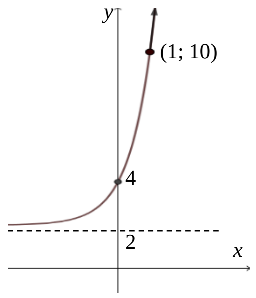
Wenk:
teken eers 'n rowwe skets van f ⇒ geen x −afsnitte

2. Teken die grafiek van $g(x) = -3^x + 3$

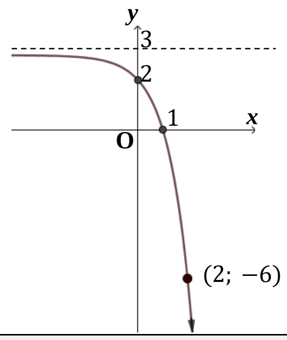
(d) **gebied (definisieversameling)**: $x \in \mathbb{R}$
terrein (waardeversameling): $y > -2$

Oplossings:

1.



2.

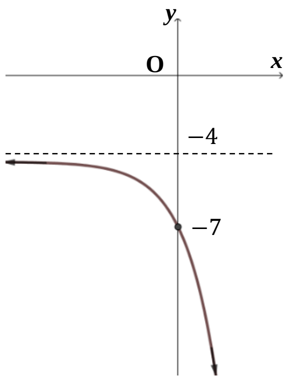


Les 1c	Vind die vergelyking van die eksponensiële funksie as die grafiek gegee word.

Voorbeeld 8:

Bepaal die vergelyking van die gegewe grafiek in die vorm:

$f(x) = a.2^x + q$



Oplossing:

$f(x) = a.2^x + q$

$q = -4$ (horisontale asimptoot by $y = -4$)

$\Rightarrow f(x) = a.2^x - 4$

y −afsnit

Vervang $(0;\ -7)$ in vergelyking:

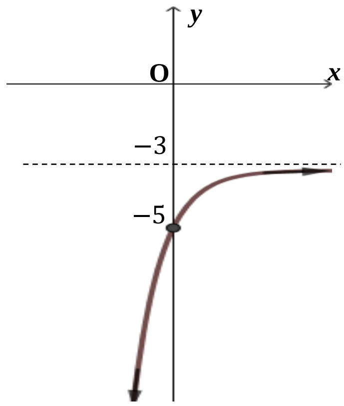
$\therefore -7 = a.2^0 - 4$
$\therefore -7 + 4 = a.1$
$\therefore a = -3$

$\Rightarrow f(x) = -3.2^x - 4$

Kan jy?

Bepaal die vergelyking van die gegewe grafiek in die vorm:

$f(x) = a.\left(\frac{1}{5}\right)^x + q$

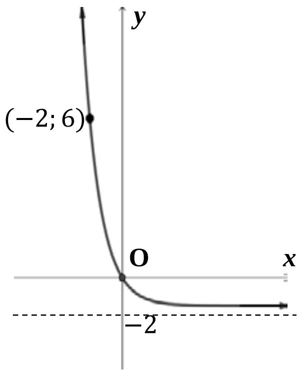


Oplossing:

Oplossing:

$f(x) = -2.\left(\frac{1}{5}\right)^x - 3$

Voorbeeld 9:
Bepaal die vergelyking van die gegewe grafiek in die vorm:
$g(x) = a.b^x + q$



Oplossing:
$g(x) = a.b^x + q$

horisontale asimptoot is by $y = -2$
$\therefore g(x) = a.b^x - 2$

grafiek gaan deur oorsprong $(0;\ 0)$
Vervang $(0;\ 0)$ in vergelyking: $\Rightarrow 0 = a.b^0 - 2$
$\therefore 2 = a.1 \Rightarrow\ \boldsymbol{a = 2}$
$\therefore g(x) = 2.b^x - 2$

omdat die grafiek dalend is, is b ’n breuk

Vervang punt $(-2;\ 6)$ in vergelyking:
$\therefore 6 = 2.b^{-2} - 2 \quad \Rightarrow 6 + 2 = 2.b^{-2} \quad \therefore \frac{8}{2} = 4 = b^{-2}$

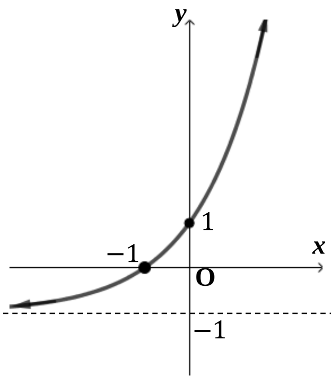
$\therefore\ (b^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore\ b = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1}$

$\therefore\ \boldsymbol{b = \frac{1}{2}}$

$\therefore$vergelyking: $g(x) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

Kan jy?
Bepaal die vergelyking van die gegewe grafiek in die vorm:
$g(x) = a.b^x + q$



Oplossing:

Oplossing:
$g(x) = 2.2^x - 1$

Samevatting: As $f(x) = a.b^x + q$ waar $b > 1$ of $0 < b < 1$, dan:

- f is **stygend** as $\boldsymbol{b > 1}$ en **dalend** as $\boldsymbol{0 < b < 1}$
- f het ’n horisontale **asimptoot** by $\boldsymbol{y = q}$
- Die $\boldsymbol{y}$ **−afsnit** is by $\boldsymbol{y = a + q}$ OF bepaal y deur $\boldsymbol{x = 0}$ te stel.
- Die $\boldsymbol{x}$ **−afsnit** (indien enige) kan bepaal word deur $\boldsymbol{y = 0}$ op te los.
- Die grafiek van $y = a.b^x + q$ kan verkry word van die **‘moederfunksie’** $y = b^x$ deur sekere transformasies daarop toe te pas.
- Die **gebied (definisieversameling)** is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
- Die **terrein (waardeversameling)** is $\boldsymbol{y > q}$ (as $a > 0$) en $\boldsymbol{y < q}$ (as $a < 0$)

- Bepaal die vergelyking van ’n gegewe eksponensiële grafiek deur: $y = a.b^x + q$ te gebruik.
  - Kry die waarde van q vanaf die horisontale asimptoot.
  - Bepaal die waarde van a deur die ander punt in die vergelyking te vervang.
  - Gewoonlik word b gegee: as die grafiek stygend is, dan is $b > 1$; as die grafiek dalend is, is b ’n breuk, andersins vervang ’n ander punt om b te bepaal.

Oefeninge oor die Eksponensiële funksie

Siyavula Hoofstuk 5 bl. 145
bl. 157 Oef 5.5; bl. 185 Einde van hoofstuk Oef nrs. 3; 10f; 11; 12

Mind Action Series Graad 10
bl. 131- 133 Oef 4 'n – h; bl. 153 – 154 Oef 11; bl. 116 – 117 Konsolidasie en Hersiening

Klaskamer Wiskunde bl. 142-178: