VAK en GRAAD	WISKUNDE GR 10	
KWARTAAL 3	Week 1	
ONDERWERP	Fuksies en Grafieke - Hiperbool	
DOEL VAN DIE LES	1. Inleiding tot die vorm en die vergelyking van ‘n hiperbool. 2. Toon aan hoe die parameters “a” en “q”, die grafiek van die hiperbool beinvloed. 3. Skets die hiperbool en bepaal die vergelyking van die hiperbool as die skets gegee is.	
HULPBRONNE	**Papiergebaseerde hulpbronne**	**Digitale hulpbronne**
	Gaan na die hoofstuk oor Funksies en dan na die afdeling oor die Hiperbool in jou Wiskunde handboek.	https://youtu.be/b-j4d1TuQpY https://youtu.be/QmtxAh2fDCg

INLEIDING: In die vorige les het jy geleer van die vorm van die parabool, hoe om dit te teken en om die vergelyking te bepaal van die kwadratiese funksie in die vorm, $f(x) = ax^2 + q$. Jy behoort te weet hoe om die y −koördinaat van ‘n punt van ‘n funksie te bereken as die x −koördinaat gegee is en dit op ‘n Cartesiese vlak neer te stip.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE: In die les sal ons die funksie met die vergelyking, $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x} + q}$ die **Hiperboliese funksie** ondersoek.

Eerstens sal ons die vorm van die grafiek ondersoek. Ons begin hiermee deur voorbeeld 1 hieronder.

Voorbeeld 1:

Bekou die funksie $f(x) = \frac{1}{x}$,

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$f(x)$									

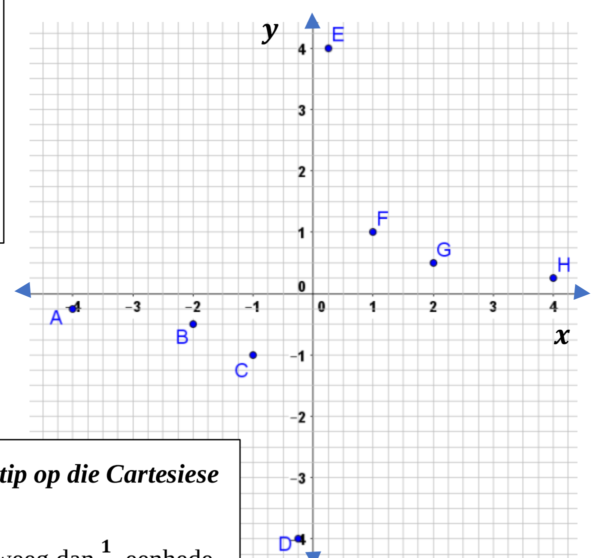
a) Voltooi die bostaande tabel.

b) Kontroleer jou tabel met die **oplossing** langsaan.

c) Stip die punte op die Cartesiese vlak soos aan die regterkant , maak seker dat jy op jou eie die punte kan neer stip.

Oplossing:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1-	-4		4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



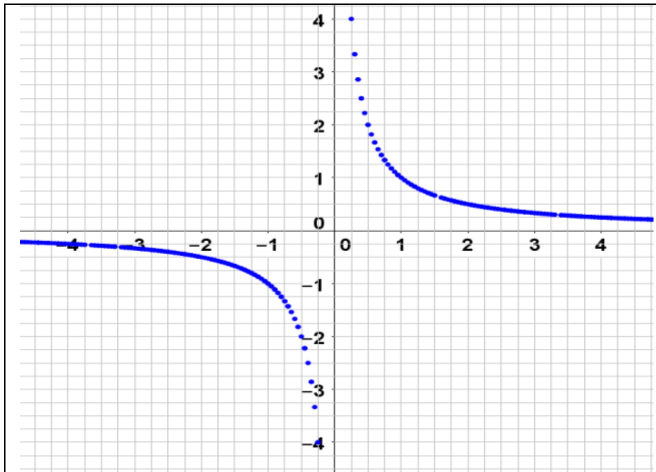
Nota: $f(x)$ is die y-koördinaat van elke punt. Die punte word ‘n naam gegee sodat dit makliker is om daarna te verwys. Die volgende is verkry van die tabel.

A$(-4;-\frac{1}{4})$, B$(-2;-\frac{1}{2})$, C$(-1;-1)$, D$(-\frac{1}{4}; -4)$, E$(\frac{1}{4}; 4)$,

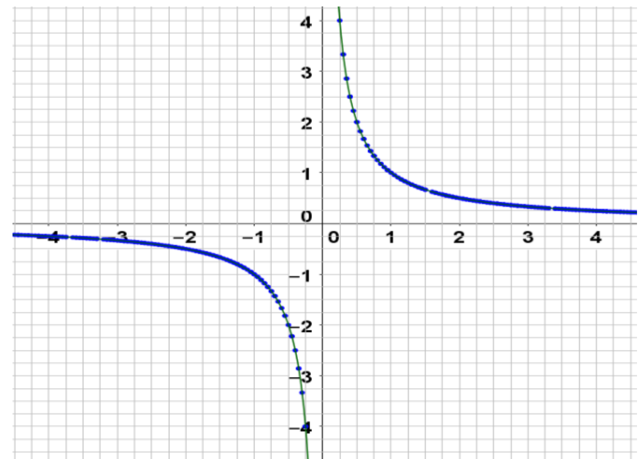
F$(1; 1)$, G$(2; \frac{1}{2})$ en H$(4; \frac{1}{4})$

Hoe om A(-4;$-\frac{1}{4}$) neer te stip op die Cartesiese vlak

Gaan na -4 op die x- as, beweeg dan $\frac{1}{4}$ eenhede afwaarts met die y-as. Al die ander punte kan op dieselfde manier neer gestip word.



Indien jy meer x- waardes neem en die ooreenstemmende y- waardes bereken vir die funksie, $f(x) = \frac{1}{x}$ en die punte neerstip sal die beeld soos in die figuur aan die linkerkant verskyn. Jy sal saamstem as meer en meer punte bereken en neer gestip word dat die grafiek aan die regterkant verskyn. **Neem kennis** dat die grafiek nie 'n ***x*- of *y* – afsnit** het nie.



Kom ons ondersoek die effek van die waarde van "***a***" **en** "***q***" op die vorm van die verskillende hiperbole :

Voorbeeld 2: Bekou die funksie :

$$k(x) = -\frac{1}{x}$$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$k(x)$			1			-1		

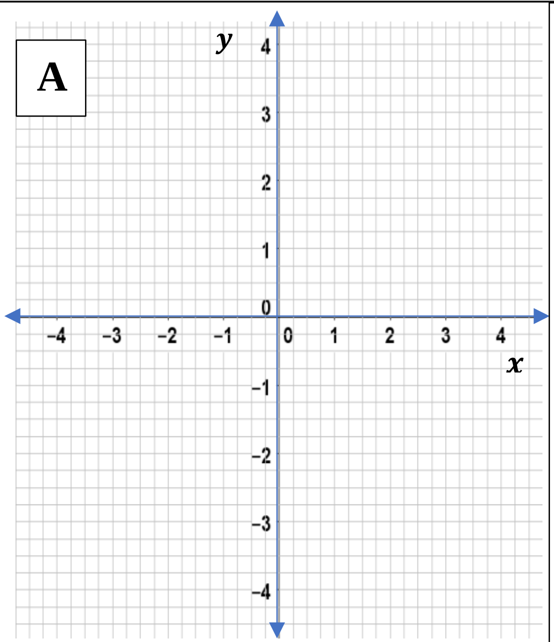
a) Voltooi die bostaande tabel.

b) Stip die punte van $k(x)$ op die Cartesiese vlak A.

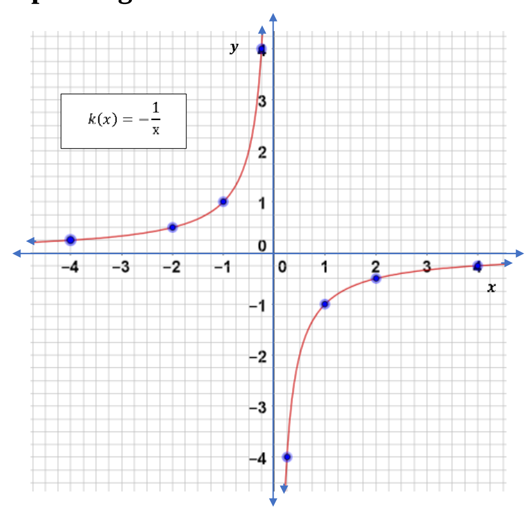
c) Verbind die punte aangedui in b).

d) Wat kan jy waarneem van die grafiek in vergelyking met die grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ hierbo?

A



Oplossing:



Kan jy:

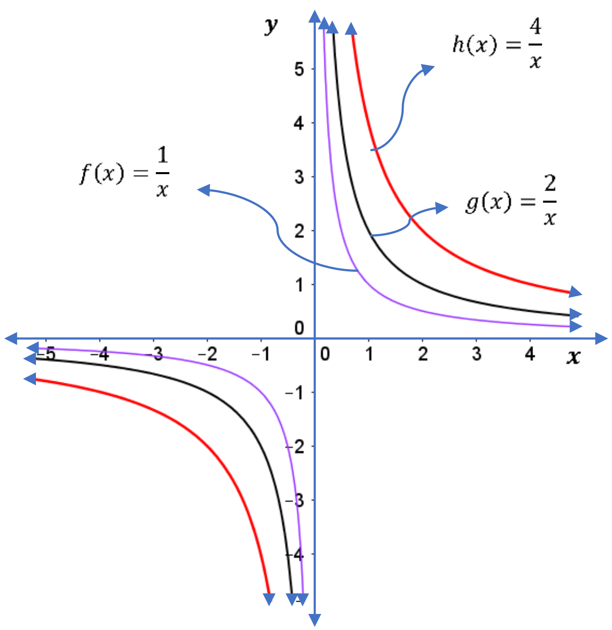
Skets die grafiek van, $j(x) = -\frac{6}{x}$.

Soos ons die funksies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $k(x) = -\frac{1}{x}$ hierbo geteken het, kan ons op dieselfde manier enige ander hiperbole teken, deur geskikte x-waardes met hul ooreenstemmende y-waardes te bereken, die punte neer te stip en dan te verbind.

Deur die gebruik van ‘n rekenaar was,

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ en $h(x) = \frac{4}{x}$

op dieselfde assestelsel geskets. Beskou die onderstaande grafiek.

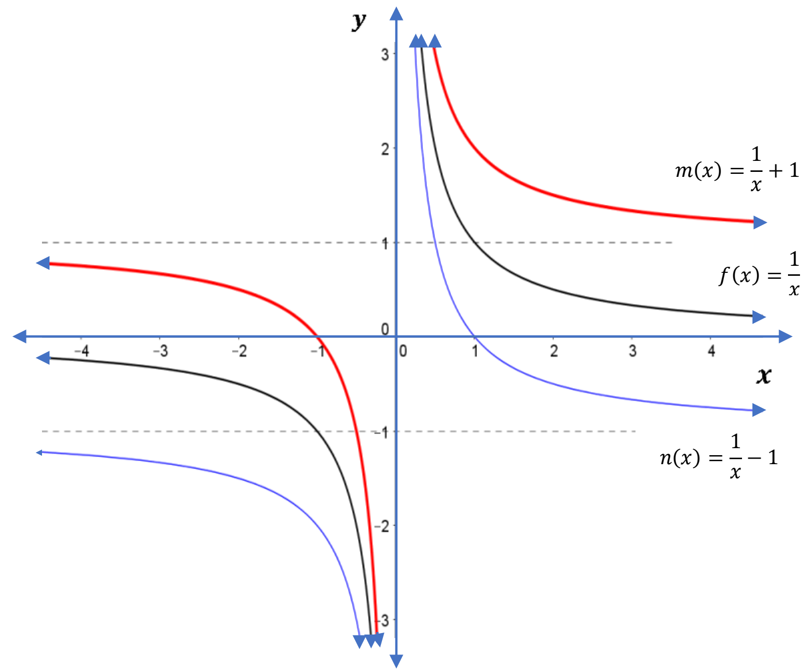


Let op dat soos wat die getal in die teller “a” groter raak, word die arms van die hyperbole vertikaal weg van die x-as gestrek. Die arms van die grafiek van $h(x) = \frac{4}{x}$ is verder van die x-as gestrek in vergelyking met die grafiek van $g(x) = \frac{2}{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$.

Deur die gebruik van ‘n rekenaar was,

$f(x) = \frac{1}{x}$, $m(x) = \frac{1}{x} + 1$, en $n(x) = \frac{1}{x} - 1$

op dieselfde assestelsel geskets. Beskou die onderstaande grafiek.



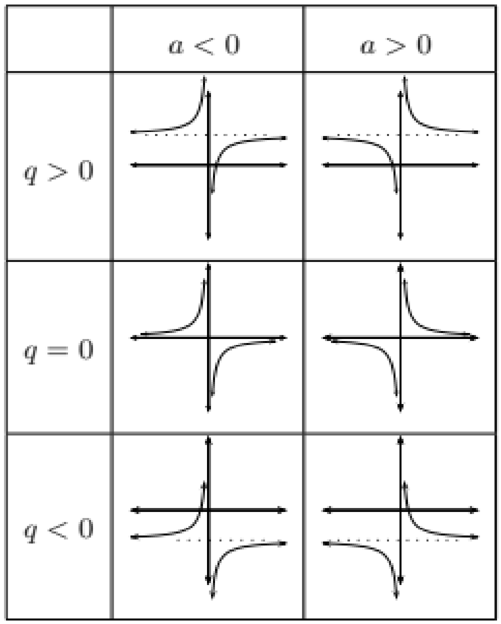
Let wel dat die grafiek van $\boldsymbol{m(x) = \frac{1}{x} + 1}$ is die grafiek van f wat 1 eenheid opwaarts geskuif het.

Die grafiek van. $n(x) = \frac{1}{x} - 1$, is die grafiek van f wat 1 eenheid afwaarts geskuif het.

Eienskappe van Hiperbool met Vergelyking: $y = \frac{a}{x} + q,$ Waar $x \neq 0$ en $y \neq q$

Asimptote: Dit is lyne wat 'n grafiek nader maar nooit raak of sny nie.

Hieronder is ruwwe sketse vir die hiperbool met verskillende waarde(s) van"a" en "q"



Eienskappe

- **Asimptote:** Die Hiperbool het twee asimptote.
  - $x = 0$ (dit is die y-as) en $y = q$ is die vergelykings van die twee asimptote.

- **Vorm en Kwadrant van die hiperbool**
  - As $a > 0$, is die grafiek in die 1ste en 3de kwadrante.
  - As $a < 0$, is die grafiek in die 2de en 4de kwadrante.

- q bepaal die aantal eenhede die hiperbool bokant of onderkant die x – as skuif.
  - As $q > 0$, sal die hiperbool q eenhede skuif bokant die x as.
  - As $q < 0$, sal die hiperbool q eenhede skuif onderkant die x as.
  - As $q = 0$, dan is die x- as die tweede asimptoot.

- Simmetriese lyne: Die hiperbool het twee Simmetriese lyne .
  $y = x + q$ en $y = -x + q$
- **Gebied:** $x \in R$, $\boldsymbol{x \neq 0}$

- **Terrein:** $\boldsymbol{y} \in R$, $y \neq \boldsymbol{q}$

Omdat die vergeyking van die hiperbool $y = \frac{a}{x} + q$, ongedefinieërd is as $x = 0$ is.

Skets van die Hiperbool:

Daar word van jou verwag om die Hiperbool te skets deur van sy eienskappe gebruik te maak, en nie deur punt vir punt neer stipping nie.

Om 'n hiperbool te skets:

1. Skryf die vergelyking in die standaard vorm. As die vergelykingin die vorm , $y = \frac{a}{x} + q$ is, is dit 'n hiperbool. Die teken van "a", bepaal in watter kwadrant die hiperbool is, as $a > 0$ sal die hiperbool in die 1ste en 3de kwadrant wees, as $a < 0$ s die hiperbool in die 2de en 4de kwadrant.
2. Skryf neer die asimptote. Dit wil sê $x = 0$, is die vertikale asimptoot(dit is die y-as) en $y = q$ is die horisontale asimptoot.
3. Bepaal die x- afsnitte. Sommige hiperbole het nie 'n x-afsnit nie. Indien 'n hiperbool nie een het nie, bepaal die koördinate van enige ander punt op die grafiek en dui dit aan op die skets.

Sketse van die Hiperbool

Voorbeeld 3:

1.1 Skets die grafiek van, $f(x) = -\frac{4}{x}$.

1.2 Skryf neer die gebied.

1.3 Skryf neer die terrein.

Oplossing:

1.1 a) Vorm van hiperbool f$(x) = \frac{a}{x}$,

a $<$ 0, daarom is skets in 2de & 4de kwadrant.

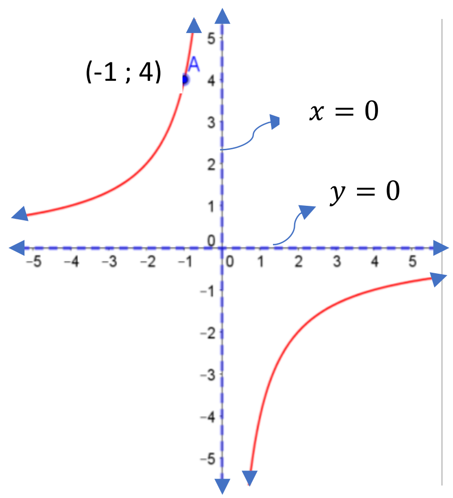
b) Asimptote: $x = 0$ & $y = 0$

c) As y = 0 ‘n asimptoot is, dan is daar geen x-afsnitte.

1.2 Gebied: $x \in R,\ x \neq 0$

1.3 Terrein: $y \in R,\ y \neq 0$

Skets van $f(x) = -\frac{4}{x}$



Stappe om ‘n grafiek te teken

1. Skryf die vergelyking in standaardvorm om te bepaal of die vergelyking ‘n parabool, hiperbool of eksponensiële grafiek is.
   $a < 0$ ∴ Hiperbool in 2de & 4de kwadrant
2. Skryf neer die asimptotes.
3. Bepaal die x-afsnit. Indien geen x- afsnit bepaal ‘n ander punt op die grafiek.

Gebruik bostaande om ‘n grafiek te skets met byskrifte.

Kan jy:

Volg die stappe Skets die grafiek van:

$f(x) = \frac{6}{x}$

Voorbeeld 4

Skets die volgende grafiek en toon alle afsnitte met die asses en asimptotes van: $g(x) = -\frac{4}{x} + 1$

Oplossing:

1. Standaardvorm (ja)
2. Vorm : $a < 0$ (2de & 4de kwadrant)
3. x-afsnitte: stel $y = 0$

$0 = -\frac{4}{x} + 1$

$0 = -4 + x$ (maal met GGD wat x is)

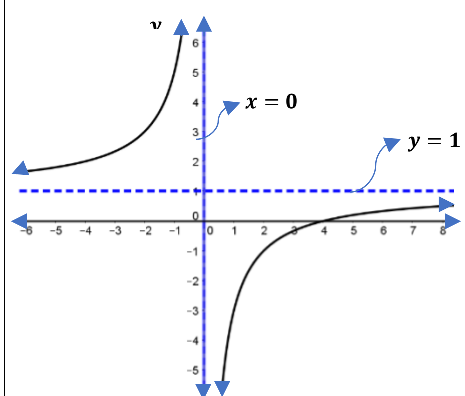
$x = 4$

D.w.s (4 ; 0) is die x-afsnitte

Gebied: $x \in R,\ x \neq 0$

Terrein: $y \in R,\ y \neq 0$

Skets van $\boldsymbol{y = -\frac{4}{x} + 1}$



Kan jy:

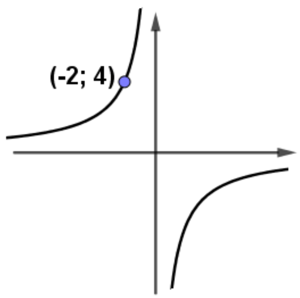
Skets die grafiek van $y = \frac{3}{x} - 2$ toon alle afsnitte met die asses en asimptotes? Bepaal ook die gebied en terrein.

Bepaling van die vergelyking van die hiperbool. Daar is twee metodes wat gebruik word, afhangende van die informasie wat gegee word.

Voorbeeld 5

Metode 1:

Gegee die horisontale asimptoot en enige ander punt op die grafiek.



Stap 1: Gebruik die algemene vergelyking.

Stap 2: Die horisontale asimptote gee jou die waarde van q

Stap 3: Vervang die koördinate van die gegewe punt om die waarde van a te bepaal.

Oplossing vir Voorbeeld 5

$y = \frac{a}{x} + q$

$q = 0$ daarom is $y = \frac{a}{x}$

Vervang (-2; 4) in $y = \frac{a}{x}$

$\therefore 4 = \frac{a}{-2}$

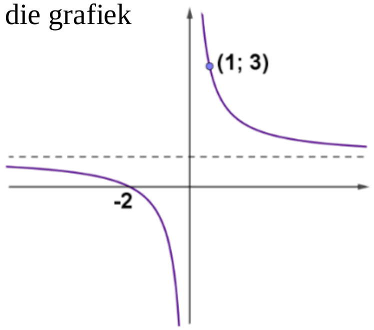
$\therefore a = -8$

$\therefore y = -\frac{8}{x}$

Voorbeeld 6

Metode 2:

Gegee enige twee punte op die grafiek



Stap 1: Gebruik die algemene vergelyking.

Stap 2: Vervang die koördinate van die eerste punt in die vergelyking om vergelyking ① te gee.

Stap 3: Vervang die koördinate van die tweede punt in die vergelyking om vergelyking ② te gee.

Stap 4: Bepaal a en q deur vergelyking ① en ② gelyktydig op te los.

Oplossing vir Voorbeeld 6

$y = \frac{a}{x} + q$

Vervang (1; 3) in $y = \frac{a}{x} + q$

$3 = \frac{a}{1} + q$

$\therefore 3 = a + q$ ....①

Vervang (-2; 0) in $y = \frac{a}{x} + q$

$0 = \frac{a}{-2} + q$

$\therefore \quad 0 = a - 2q$ ....②

Trek vergelyking ② af vanaf ①

$3 = 3q$

$\therefore q = 1$

Vervang $q = 1$ in vergelyking①

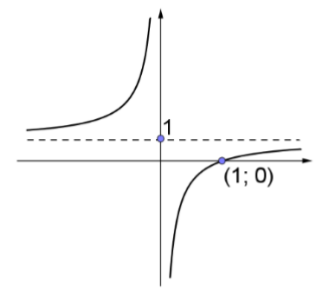
$3 = a + 1$

$\therefore \quad a = 2$

$\therefore y = \frac{2}{x} + 1$

Kan jy:

Beantwoord die volgende vrae t.o.v. die onderstaande grafiek.



1. Bepaal die vergelyking van die funksie.
2. Wat is die vergelyking van die horisontale asyimtoot?
3 Wat is die terrein van die funksie.
4 Bepaal die vergelyking van die grafiek as die bostaande grafiek afwaarts skuif met 3 eenhede.

Antwoorde:

1. $y = -\frac{1}{x} + 1$
2. $y = 1$
3. Terrein: $\boldsymbol{y} \in R$, $y \neq \mathbf{1}$
4. $y = -\frac{1}{x} - 2$

<table>
<tr><td>AKTIWITEITE/ASSESSERING</td><td><table><tr><td>Everything Maths Siyavula</td><td>Wiskunde vir die Klaskamer</td><td>Mind Action series</td></tr><tr><td>Oef.5- 4
Bl 144 - 145</td><td>Oef 8.3 ; 8.4; 8.5
Bl. 170 - 178</td><td>Oef 3
Bl 124</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>KONSILIDASIE</td><td>Jy behoort die volgende te kan doen:
1. Skryf die vergelyking in standaard vorm.
2. Bepaling van die orientasie van die kurwe op die asse deur die gebruik van a.
3. Bepaling van die posisie van die kurwes in relation to the x axis using q.
4. Bepaling van die asimptotes.
5. Gebruik die asimptote, a, q en die x-afsnit, om ‘n grafiek te skets.
6. Bepaling van die Gebied en Terrein.</td></tr>
</table>