VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 11	
KWARTAAL 1	Week 2	
ONDERWERP	Kwadratiese Vergelykings	
DOELSTELLING VAN LES	• Hoe om kwadratiese vergelykings wat breuke, vierkantswortels en vierkante bevat op te los. • Hoe om vergelykings deur middel van faktore en die kwadratiese formule op te los.	
BRONNE	***Papiergebaseerde bronne***	***Digitale bronne***
	Gaan asseblief na die hoofstuk oor Vergelykings en Ongelykhede in jou handboek.	Waar jy hierdie prentjie in die les sien, kan jy daarop klik om die video te sien wat jou sal help om die onderwerp wat bespreek word beter te verstaan.

INLEIDING

Geagte leerder in graad 10 het jy die volgende onderwerpe oor vergelykings en ongelykhede geleer :

- Lineêre vergelykings, en dat dit vergelykings van die eerste graad is.
- Hoe om lineêre vergelykings op te los.
- Hoe om die Kleinste Gemene Veelvoud (KGV) te gebruik om lineêre vergelykings wat breuke bevat op te los.
- Hoe om woordprobleme op te los deur middel van vergelykings.
- Kwadratiese vergelykings met ander woorde vergelykings van die tweede graad.
- Hoe om kwadratiese vergelykings op te los.
- Hoe om gelyktydige vergelykings op te te los deur die metodes van eliminasie en substitusie
- Lineêre vergelykings, insluitend hoe om dit op 'n getallelyn voor te stel.

Hersien uit jou gr 10 boeke sodat jy genoegsame kennis het om nuwe inhoud te verstaan

In die volgende les wil ons bou op hierdie graad 10 inhoudskennis om graad 11 en 12 inhoud te dek

BEGRIP EN VAARDIGHEDE

Kwadratiese vergelykings

Definisie: 'n Kwadratiese vergelyking is 'n vergelyking in die vorm **:** $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ waar a, b en c konstante is en, $\boldsymbol{a\neq 0}$.

Hierdie vergelyking is in standaardvorm: voorbeeld $\boldsymbol{2x^2+3x-4=0}$ omdat $\boldsymbol{a=2,\ b=3\ en\ c=-4}$

Dit is ook bekend as 'n tweede graadse vergelyking, omdat die grootste eksponent van die veranderlike 2 is.

Die oplossing van die vergelyking word ook die **wortels** van die vergelyking genoem. Die wortels van die kwadratiese vergelyking is die waardes van x wat die vergelyking bevredig, m.a.w. wat die vergelyking waar maak.

A) Gebruik van faktore om kwadratiese vergelykings op te los https://youtu.be/c0hdCmQaMgE

Faktorisering word gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig en kwadratiese vergelykings op te los.

Die grondbeginsel vir oplossing deur faktorisering is **die beginsel van die Nul Produk:**

As $\boldsymbol{a \times b = 0}$, dan is, $\boldsymbol{a = 0}$ *of* $\boldsymbol{b = 0}$

Faktorisering wat oor die algemeen gebruik word om kwadratiese vergelykings op te los	
Gemene faktore	$ax^2 + 2x = x(ax + 2)$
Verskil van vierkante	$x^2 - 4x^2 = (a - 2b)(a + 2b)$
Drieterm faktorisering	$a^2 + ab - 2b^2 = (a - b)(a + 2b)$ $a^2 - 3ab + 2b^2 = (a - b)(a - 2b)$ $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a + b)(a + 2b)$ $a^2 - ab - 2b^2 = (a + b)(a - 2b)$
Groepering (gemene hakies)	$(a + b) - 3a(a + b) = (a + b)(1 - 3a)$
Verskil tussen twee derdemagte	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Som van derdemagte	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Let wel dat daar drie metodes is om kwadratiese vergelykings op te los:

1. Faktorisering
2. Die kwadratiese formule en
3. Kwadraatsvoltooiing

Ons sal fokus op die eerste twee metodes

Leerders hersien en maak asseblief seker dat jy die verskillende tipe faktorisering wat in die vorige graad gedoen is goed verstaan en oefen.

Kom ons doen 'n paar voorbeelde:

Uitgewerkte Voorbeeld A

1. Los op vir $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2x^2 - 3x = 0}$

$2x^2 - 3x = 0$ [dit is in standaard vorm]

$x(2x - 3) = 0$ [faktoriseer – gemene faktor]

$x = 0$ of $2x - 3 = 0$ [nul produk beginsel]

$\therefore \quad 2x = 3$

$\therefore \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{3}{2}$

wortels van die vergelykings

2. Los op vir $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{(2x - 1)(x + 3) = 0}$

$(2x - 1)(x + 3) = 0$ [die vergelykings is reeds gefaktoriseerd en gelyk aan nul… gereed vir oplossing]

$2x - 1 = 0$ of $x + 3 = 0$

$2x = 1$ of $x = -3$

$x = \frac{1}{2}$ of $x = -3$

Toets die wortels $\frac{1}{2}$ en -3 in die vergelyking, $(2x - 1)(x + 3) = 0$

Vir $x = \frac{1}{2}$: LK = $\left(2(\frac{1}{2}) - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 3\right) = 0 \times 3\frac{1}{2} = 0$ RK en

Vir $x = -3$: LK $(2(-3) - 1)((-3) + 3) = -7 \times 0 = 0$ RK

$\therefore \frac{1}{2}$ *en* -3 bevredig die vergelyking want as jy die wortels vervang is albei gelyk aan nul.

3. Los op vir a: $2a(a-1)+3(a-1)=0$

Oplossing:

$(a-1)(2a+3\,)=0$ [2 terme met 'n gemene faktor van $(a-1)$]

$a-1=0$ of $2a+3=0$ [faktoriseer deur groepering]

$a=1$ of $2a=-3$

$a=1$ of $a=-\frac{3}{2}$

4 . Los op vir x: $x^2-3x=10$ https://youtu.be/9-6qDkPMFYY

Oplossing:

$x^2-3x-10=0$ [skryf in standaard vorm]

$(x-5)(x+2)=0$ [factorise]

$\therefore\ x-5=0$ of $x+2=0$ [nul produk beginsel]

$x=5$ of $x=-2$

5. Los op vir x: $2(x-2)(x+2)+6x=(x-1)^2$

Oplossing:

$2(x^2-4)+6x=x^2-2x+1$ [vermenigvuldig uit]

$2x^2-8+6x=x^2-2x+1$ [tel gelyksoortige terme op]

$x^2+8x-9=0$ [skryf in standaard vorm]

$(x+9)(x-1)=0$

$(x+9)=0$ of $(x-1)=0$

$x=-9$ of $x=1$

KAN JY

Los op vir *x* in die volgende kwadratiese vergelykings

1. $x^2-9=0$
2. $x(x+6)=0$
3. $x^2=5x+6$
4. $(3-x)(5-x)=3$

Antwoorde:

1. $x=-3$ of $x=3$ 2. $x=0$ of $x=-6$ 3. $x=6$ of $x=-1$

4. $x=2$ of $x=6$

Kwadratiese vergelykings met breuke

Ons los kwadratiese vergelykings wat breuke bevat op dieselfde wyse as hoe ons die vorige vergelykings opgelos het.
Maar as een of meer noemers veranderlikes bevat, dan is daar beperkings op ons oplossings.
Byvoorbeeld- as 'n noemer $x+1$ bevat dan is
$x+1 \neq 0$ want dit beteken deling deur 0.
Onthou dat deling deur 0 is ongedefineerd in wiskunde.
Kom ons doen 'n paar voorbeelde om te wys hoe om kwadratiese vergelykings met breuke op te los

Uitgewerkte voorbeelde

6. Los op vir x: $\frac{x-2}{x-1} = \frac{2x-1}{x+7}$

Oplossing:

KGV is $(x-1)(x+7)$ [bepaal die KGV]

$\therefore \frac{(x-2)}{(x-1)}\frac{(x+7)}{(x+7)} = \frac{(2x-1)}{(x-1)}\frac{(x-1)}{(x+7)}$ $x \neq 1,\ x \neq -7$ [verwyder die beperkings]

$(x-2)(x+7) = (2x-1)(x-1)$

$x^2 + 5x - 14 = 2x^2 - 3x + 1$

$x^2 - 8x + 15 = 0$ [vereenvoudig tot standaardvorm]

$(x-3)(x-5) = 0$ [faktoriseer]

$\therefore x = 3$ of $x = 5$ [beide oplossings is geldig want $x \neq 1$ en $x \neq -7$]

7. Los op vir x : $\frac{x}{2x-4} - \frac{x}{x-2} = 1$ [faktoriseer noemer aan LK]

$\frac{x}{2(x-2)} - \frac{x}{x-2} = 1$

KGV = $2(x-2)$

$$2(x-2) \times \frac{x}{2(x-2)} - 2(x-2) \times \frac{x}{x-2} = 1 \times 2(x-2)$$

$$x - 2x = 2x - 4$$

$$-x = 2x - 4$$

$$-3x = -4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

KAN JY?

Los op vir x in die volgende vergelykings

1. $\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$
2. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x+1}$

Antwoorde:

1. $x = 6$ *of* $x = -2$
2. $x = 5$

Oplossing van kwadratiese vergelykings deur gebruik te maak van substitusie (k-metode)

Ons kan 'n vergelyking vereenvoudig deur een van die ***komplekse veranderlike*** gemene faktor terme te vervang met eenvoudiger veranderlikes. Dit sal 'n komplekse vergelyking veel makliker maak om mee te werk. Dit is belangrik om te onthou om die substitusie om te draai aan die einde. Dit is bekend as die *k*- metode.

Uitgewerkte voorbeelde

8. Los op vir *x*: $\mathbf{2(x+5)^2+3(x+5)-2=0}$

Oplossing:

$\boldsymbol{Laat}\ \ (\boldsymbol{x}+\mathbf{5})=\boldsymbol{k}$ …ons kan enige veranderlike gebruik so lank dit nie in die oorspronklike vergelyking verskyn nie

$2(k)^2+3(k)-2=0$

$(2k-1)(k+2)=0$

$2k-1=0$ of $k+2=0$

$k=\frac{1}{2}$ of $k=-2$

Maar $\boldsymbol{k}=\ \boldsymbol{x}+\mathbf{5}$ $\quad\therefore x+5=\frac{1}{2}$ of $x+5=-2$

$x=-4\frac{1}{2}$ of $x=-7$

Uitgewerkte voorbeeld 4

9. Los op vir *x*: $\mathbf{3x^2+x-1+\frac{1}{3x^2+x-3}=0}$

Oplossing:

Laat: $3x^2+x=k$ $\qquad\therefore k-1+\frac{1}{k-3}=0$

$$\frac{(k-1)(k-3)}{k-3}=0$$

$$k(-1)(k-3)+1=0$$

$$k^2-4k+4=0$$

$$(k-2)^2=0$$

$$k-2=0$$

$$\therefore 3x^2+x-2=0$$

$$(3x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}\ of\ \ x=-1$$

KAN JY

Los op vir $\boldsymbol{x}$ in die volgende kwadratiese vergelykings.

1. $(x^2+3)^2-2(x^2+3)-8=0$
2. $\frac{1}{x^2-x-1}=x^2-x-1$

Antwoorde: 1. $x=\ 1\ of-1$ $\qquad$ 2. $x=0\ \ of\ 1\ \ of\ 2\ of-1$

Gebruik van die kwadratiese formule om kwadratiese vergelykings op te los

- Die kwadratiese formule kan gebruik word om die wortels van enige kwadratiese vergelyking in die vorm $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ te bepaal.
- Dit word gebruik om die wortels van kwadratiese vergelykings te bepaal as die uitdrukkings nie gefaktoriseer kan word nie.
- Die kwadratiese formule is

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Wanneer jy die kwadratiese formule gebruik maak altyd seker dat die vergelyking is in die standaard vorm, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$
- Daarna moet $a, b\ en\ c$ versigtig vervang word.
- a is die koeffisient van x^2, b is die koeffisient van x en c is die konstante term.

Voorbeeld

10. Los op vir $\boldsymbol{x}$ deur gebruik te maak van die kwadratiese formule

$$2x^2 + 5x - 4 = 0$$

Oplossing:

$a = 2; \quad b = 5; \quad c = -4$

$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$\boldsymbol{x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$

$x = 0{,}64 \quad \text{of} \quad -3{,}14$

Werk deur al die uitgewerkte voorbeelde totdat jy elke berekening ten volle verstaan.

Voorbeeld:

11. Los op vir $\boldsymbol{x}$ deur gebruik te maak van die kwadratiese formule

$$3x = -2x^2 - 5$$

Oplossing:

$2x^2 + 3x + 5 = 0$ [standaard vorm]

$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ [kwadratiese formule]

$\boldsymbol{x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}}$ [substitusie]

$x = -3 \pm \frac{\sqrt{-31}}{4}$ [vereenvoudiging]

Daar is geen reële waardes vir x omdat $\sqrt{-31}$ is nie- reële.

Voorbeeld 7

Los op vir x deur gebruik te maak van die kwadratiese formule

$$(x-3)(x+1)=-2$$

Oplossing:

$(x-3)(x+1)= -2$ [vermenigvuldig uit]

$x^2-2x-3=-2$ [stel die vergelyking gelyk aan 0]

$x^2-2x-1=0$ [hierdie drieterm kan nie gefaktoriseer word nie]

$\boldsymbol{x}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ [gebruik die kwadratiese formule]

$\boldsymbol{x}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$ [vervang a, b en c in die formule]

$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$ [vereenvoudig]

$\therefore x=1+\sqrt{2}\ \ of\ \ x=1-\sqrt{2}$ [oplossings in eenvoudigste wortelvorm]

$\therefore x=2{,}41\ \ of\ \ x= -0{,}41$ [oplossings korrek tot twee desimale plekke]

KAN JY?

Los op vir x deur die gebruik van die kwadratiese formule

1. $x^2+6x-2=0$
2. $5x^2-\frac{1}{4}x=3$
3. $7(x-3)(x+2)=6x-2$

Antwoorde

1. $x=0{,}32\ \ of\ \ x= -6{,}32$

2. $x=-\frac{3}{4}\ \ \ of\ \ x=\frac{4}{5}$

3. $x=3{,}49\ of -1.64$

<u>Konsolidasie</u>

- Vergelykings en ongelykhede is deel van algebraïese uitdrukkings wat $\pm$ 30% van die finale Vraestel 1 eksamen tel.
- Kwadratiese vergelykings met vierkante en viekantswortels is in die vorige hoofstuk van eksponente en wortelvorme behandel.
- Wanneer 'n aantal desimale plekke gemeld word, is dit 'n leidraad om die kwadratiese formule te gebruik.
- Die wortels van 'n vergelyking is die waardes van die veranderlikes wat die vergelyking bevredig (waar maak).
- Onthou om altyd elke oplossing te toets om te verseker dat die oplossings geldig is.

<u>ACTIVITY</u>	**Mind Action Series**	**Via Africa**	**<u>Siyavula</u>**	Wiskunde in die klaskamer	Platinum
	Bl. 27 – 32 Oefening 4,6 en 7	Bl. 23-29 Oefeninge 1 tot 5	Einde van hoofstuk Bl. 49 – 59 Oefening 7.1 , 7.2, 7.3	Bl. 68 Hersienings oefening	Bl. 51 - 52 Hersienings oefening