




VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 11	
KWARTAAL 1	Week 3	
ONDERWERP	Kwadratiese Vergelykings en ongelykhede.	
DOELSTELLINGS VAN LES	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreteer kwadratiese ongelykhede. • Los vergelykings met twee veranderlikes gelyktydig op. 	
BRONNE	<i>Papiergebasseerde hulpbronne</i>	<i>Digitale hulpbronne</i>
	Gaan asseblief na die <i>Kwadratiese Vergelykings en Ongelykhede</i> hoofstuk in jou handboek.	 In die les waar jy hierdie simbool sien, kan jy daarop klik om 'n video te sien van 'n konsep of verduideliking van Kwadratiese vergelykings en ongelykhede

LES 2a KWADRATIESE ONGELYKHEDE

INLEIDING:

Beste leerder in die vorige les het ons geleer hoe om kwadratiese vergelykings op te los wat breuke, vierkants wortels en vierkante bevat.

Ons het geleer hoe om kwadratiese vergelykings op te los met faktorisering en die kwadratiese formule.

In hierdie week se les gaan ons bou op laas week se les asook graad10 kennis oor liniêre ongelykhede en hoe om dit voor te stel op 'n getallelyn.

Ons het ook geleer hoe om gelyktydige vergelykings op te los met behulp van die illuminasie en substitusie metode in graad 10.

Ons sal nou bou op die kennis om die inhoud van **Kwadratiese Vergelykings en Ongelykhede** van graad 11 te bemeester.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

'n Ongelykheid is wiskundige simbole soos $<$; $>$; \leq ; \geq wat gebruik word om twee waardes te vergelyk.

Die verskil tussen 'n ongelykheid en 'n vergelyking lê in die vergelykings teken (vergeljking =)

Ongelykhede word opgelos deur gebruik te maak van dieselfde metodes wat gebruik word om vergelykings op te los.

Die volgende reëls is altyd van toepassing wanneer berekeninge gedoen word met ongelykhede:

- Verander die rigting van die ongelykheid teken wanneer gemaak of gedeel word met 'n negatiewe getal.
- Moet nie die rigting van die ongelykheid teken verander wanneer jy maal of deel met 'n positiewe getal nie.

Ons sal die les begin deur graad 10 liniêre ongelikhede te hersien wat ons sal voorberei vir graad 11 Kwadratiese Ongelikhede

Voorbeeld 1

Los die volgende ongelikhede op.

$$\begin{aligned} 1. \quad x + 1 &< 3 \\ x &< 3 - 1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad -\frac{3}{2}x + 3 &\geq 1 \\ -\frac{3}{2}x &\geq -2 \\ -3x &\geq -4 \\ x &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Onthou om die ongelikhede teken om te draai as jy met 'n negatiewe getal deel.

$$\begin{aligned} -4(x - 3) &\geq 2(x - 12) \\ -4 + 12 &\geq 2x - 24 \\ -4x - 2x &\geq 24 - 12 \\ -6x &\geq -36 \\ \therefore x &\leq 6 \end{aligned}$$

KAN JY? Los die volgende ongelikhede op.

$$1. \quad 2x + 3 > 1 \quad 2. \quad \frac{2x+4}{7} \geq \frac{3(x-3)}{3} \quad 3. \quad 4(x - 3) \geq 2(x - 10)$$

Antwoorde

$$1. \quad x > -1 \quad 2. \quad x \leq 5 \quad 3. \quad x \geq -4$$

<https://youtu.be/IyEiQBtffFM>



Die volgende tabelle sal jou geheue verfris van kennis wat benodig word om aan te gaan met graad 11 inhoud.

Ongelykheid teken	In woorde	Ingesluit/ uitgesluit	Getallelyn
>	Groter as	Uitgesluit (oop)	
≥	Groter of gelyk aan	Ingesluit(toe)	
<	Kleiner as	Uitgesluit (oop)	
≤	Kleiner of gelyk aan	Ingesluit(toe)	

Ongelykheid	Notasie	Getallelyn
$x > 2$	$x \in (2; \infty)$	
$x \geq 2$	$x \in [2; \infty)$	
$2 \leq x \leq 6$	$x \in [2; 6]$	
$2 < x < 6$	$x \in (2; 6)$	
$2 \leq x < 6$	$x \in [2; 6)$	
$2 < x \leq 6$	$x \in (2; 6]$	

Kwadratiese Ongelykhede

'n Kwadratiese ongelykheid behels die bepaling van die waardes van x van 'n parabool wat onder of bo die x – as lê. In die 2de kwartaal (Funksies) sal jy geleer word om 'n parabool te skets. Al wat ons nou benodig is 'n basiese begrip van hoe om die x – afsnitte van 'n parabool te bereken asook die vorm

Voorbeeld 2

Los vir x op in die volgende ongelykhede

2.1 $x^2 \leq 9$
 $x^2 - 9 \leq 0$
 $(x + 3)(x - 3) \leq 0$

STAP 1

Soos in oplos van kwadratiese vergelykings, moet ons faktoreer om die kritieke waardes te bepaal.

STAP 2

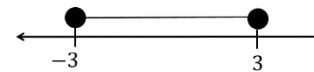
Teken 'n grafiek om jou te help om die ongelykheid op te los:

Dui die x –afsnitte op jou grafiek.

Die ongelykheid teken sê vir ons of die antwoord onder (waar y negatief is) of bo (waar y positief is) die x – as lê.

In hierdie geval wil ons die waardes onder hê, waar y negatief is

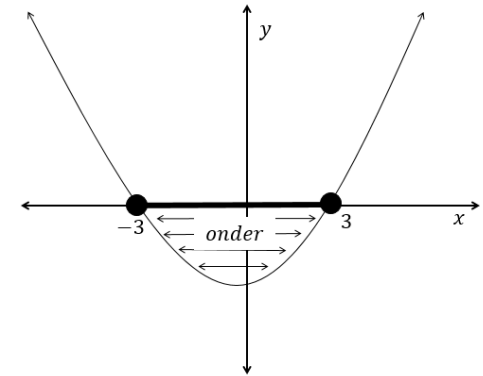
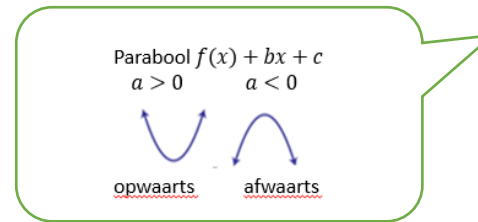
Die kritiese waardes word ingesluit in die finale antwoord. Dit wil sê ons sal geslote sirkels gebruik om die ongelykheid voor te stel op 'n getalle lyn .



STEP 3

Bepaal nou die waardes van x waarvoor $x^2 - 9 \leq 0$

Dit is waar die grafiek die x – as sny en onder die x – as lê.



$\therefore -3 \leq x \leq 3$

2.2

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

$$(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ of } x \geq 5$$

STAP 1

Soos in oplos van kwadratiese vergelykings, faktoriseer ons om die kritieke waardes te vind.

STAP 2

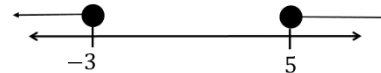
Teken 'n grafiek om jou te help om die ongelykheid op te los:

Dui die x -afsnitte aan op jou grafiek.

Die ongelykheid teken sê vir ons of die antwoord onder (waar y negatief is) of bo (waar y positief is) die x -as lê.

In hierdie geval wil, ons die waardes bo hê waar y positief is

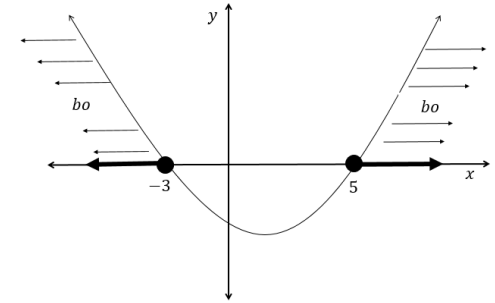
Die kritiese waardes word ingesluit in die finale antwoord. Dit wil sê ons sal geslote sirkels gebruik om die ongelykheid voor te stel op 'n getalle lyn

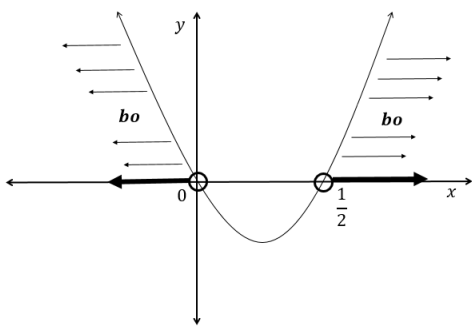
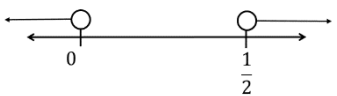


STAP 3

Bepaal nou die waardes van x waarvoor $(x + 3)(x - 5) \geq 0$

Dit is waar die grafiek die x -as sny en waar dit bo die x -as is.



<p>2.3</p>	<p>$x < 2x^2$</p> <p>$-2x^2 + x < 0$</p> <p>$2x^2 - x > 0$</p> <p>$x(2x - 1) > 0$</p> <p>$x < 0$ of $x > \frac{1}{2}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Skryf in standaard vorm • maak die koëffisiënt x^2 positief, maal met -1 • faktoriseer om die kritieke waardes te vind. • Teken 'n grafiek • Die ongelykheid teken sê vir ons of die antwoord onder (waar y negatief is) of bo (waar y positief is) die x – as lê. • In hierdie geval wil, ons die waardes bo hê waar y positief is • Die kritiese waardes word nie ingesluit in die finale antwoord nie. Dit wil sê ons sal oop sirkels gebruik om die ongelykheid voor te stel op 'n getalle lyn. • Lees jou finale antwoord van die grafiek. 	 
------------	---	---	---

KAN JY?

Los die volgende ongelykhede op

1. $x^2 < 16$ 2. $x^2 + 5x - 6 \geq 0$ 3. $x^2 \leq 4x$ 4. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$

Antwoorde:

1. $-4 < x < 4$ 2. $x \leq -6$ or $x \geq 1$ 3. $0 \leq x \leq 4$ 4. $x \leq -1$ or $x \geq 4$

LES 2b – GELYKTYDIGE VERGELYKINGS



<https://youtu.be/tU4eNI2SwAE>

Inleiding:

In graad 10 het jy gelyktydige vergelykings opgelos om die sny punt te vind tussen twee reguitlyne. (een x – waarde en een y – waarde).

Kom ons kyk of jy onthou hoe om liniêre vergelykings gelyktydig op te los.

Voorbeeld 3

Los die volgende liniêre vergelykings gelyktydig op

$$2y = 2x - 1 \dots\dots (i) \text{ en } 2y + x - 2 = 0 \dots\dots (ii)$$

$$2y + x - 2 = 0$$

$$x = 2 - 2y \dots\dots (iii)$$

$$2y = 2x - 1 \dots (i)$$

$$2y = 2(2 - 2y) - 1$$

$$2y = 4 - 4y - 1$$

$$6y = 3$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 - 2y$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 1$$

$$\therefore x = 1 \text{ en } y = \frac{1}{2} \quad \left(1; \frac{1}{2}\right)$$

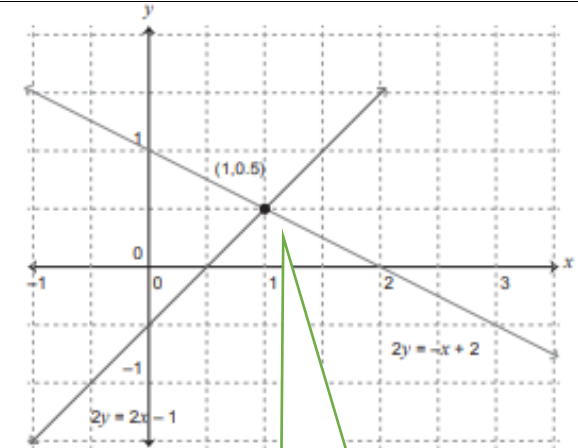
In vergelyking (ii) maak x die onderwerp van die formule om vergelyking (iii) te kry

vervang (iii) in (i)

Jy moet nou net een veranderlike in die vergelyking het

Los op vir y

Stel nou jou antwoord van y in vergelyking (i) of (ii) om die tweede veranderlike op te los



Gelyktydige vergelyking

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Ons sal nou leer hoe om vergelykings gelyktydig op te los waar die een vergelyking 'n kwadratiese vergelyking is.

Wanneer vergelykings gelyktydig opgelos word kan ons:

- Dit grafies oplos deur 'n akkurate skets te teken om die snypunt te vind.
- Dit algebraïes oplos.

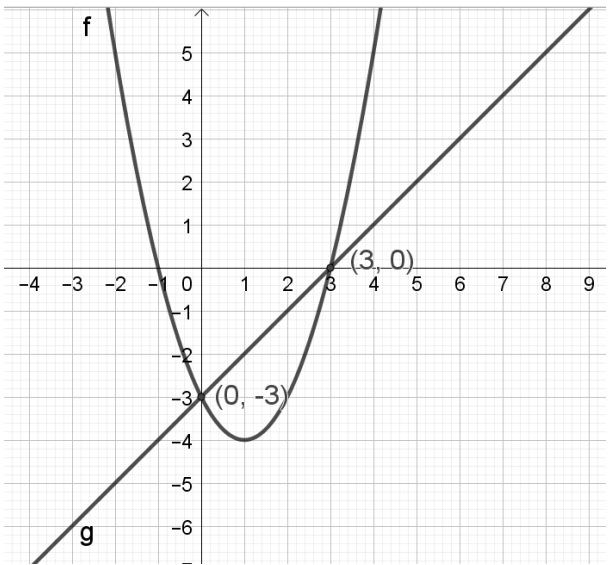
In hierdie les gaan ons verduidelik hoe om gelyktydige vergelykings algebraïes op te los.

VOORBEELD 4

Los op vir x en y gelyktydig

4.1	$y = x^2 - 1 \text{ en } y - x = 5$ $y - x = 5$ $\therefore y = x + 5$ $y = x^2 - 1$ $\therefore x + 5 = x^2 - 1$ $\therefore 0 = x^2 - x - 6$ $\therefore 0 = (x - 3)(x + 2)$ $\therefore x = 3 \text{ of } x = -2$ $y = x + 5$ <p>Vir $x = 3$ vir $x = -2$</p> $y = 3 + 5$ $y = -2 + 5 = 3$ $y = 8$ $y = 3$ <p>Die oplossing kan ook in die vorm geskryf word $(3; 8)$ en $(-2; 3)$</p>	<p>Let op: Die eerste vergelyking is 'n kwadratiese vergelyking en die tweede 'n liniêre vergelyking.</p> <p>STAP 1: maak y die onderwerp van die liniêre vergelyking</p> <p>STAP 2: vervang $y = x + 5$ in die kwadratiese vergelyking</p> <p>STAP 3: skryf vergelyking in standaard vorm.</p> <p>STAP 4: los dan vir x op</p> <p>STEP 5: die ooreenstemmende waardes van y kan bepaal word deur die waardes van x in die liniêre vergelyking te vervang</p>
4.2	Bepaal algebraïes die snypunte van die onderstaande grafieke	<p>LET OP: Wanneer ons twee vergelykings gelyktydig oplos, soek ons na die geordende paar wat aan beide vergelykings sal voldoen.</p>

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ en } y - x + 3 = 0$$

	<p>Oplossing</p> $y = x^2 - 2x - 3 \dots\dots\dots \text{(vergelyking 1)}$ $y - x + 3 = 0 \dots\dots\dots \text{(vergelyking 2)}$ $y = x - 3 \dots\dots\text{(vergelyking 3)}$ $x^2 - 2x - 3 = x - 3$ $x^2 - 3x = 0$ $x(x - 3) = 0$ $\therefore x = 0 \text{ of } x = 3$ $y = x - 3$ $y = 0 - 3 \quad \text{of} \quad y = 3 - 3$ $\therefore y = -3 \quad \text{of} \quad y = 0$ <p>Sny punte</p> <p>(0, -3) en (3; 0)</p>	<p>STEP 1: maak y die onderwerp van die formule van die liniêre vergelyking</p> <p>STEP 2: vervang $y = x - 3$ in die kwadratiese vergelyking (vergelyking 1)</p> <p>STEP 3: skryf vergelyking in standaard vorm.</p> <p>STEP 4: los dan vir x op</p> <p>STEP 5: die ooreenstemmende waardes van y kan bepaal word deur die waardes van x in die liniêre vergelyking te vervang (vergelyking 3)</p>	<p>Ons kan sny punte van ander pare grafieke/vergelykings (bv. 'n reguitlyn en 'n parabool, twee parabole of 'n hiperbool en 'n reguitlyn ens.) se sny punte bereken.</p> <p>Onthou ons kan elke vergelyking voorstel as 'n grafiek. Indien ons beide grafieke op dieselfde assenstelsel skets dan sal die sny punte van die twee grafieke die oplossing wees van die gelyktydige vergelyking.</p> 
<p>4.3</p>	<p>Bepaal algebraïes die sny punte van die onderstaande grafieke</p> $3x - y + 2 = 0 \dots\dots\dots (i) \text{ en}$ $y = -x^2 + 2x + 8 \dots\dots\dots (ii)$	<p>STAP 1: maak y die onderwerp van die formule in die liniêre vergelyking. (In hierdie geval is dit moeiliker om x die onderwerp van die formule te maak daarom het ons y gekies)</p>	

<p>$3x + 2 = y \dots \dots \dots (iii)$</p> <p>vervang (iii) in (ii)</p> <p>$3x + 2 = -x + 2x + 8$</p> <p>$0 = -x^2 - x + 6$</p> <p>$0 = (x + 3)(x - 2)$</p> <p>$x = -3 \quad \text{of} \quad x = 2$</p> <p>$y = 3(-3) + 2 \quad \text{of} \quad y = 3(2) + 2$</p> <p>$y = -7 \quad \quad \quad y = 8$</p> <p>$\therefore (-3; -7) \text{ en } (2; 8)$</p>	<p>STAP 2: vervang $y = 3x + 2$ in die kwadratiese vergelyking</p> <p>STAP3: Skryf vergelyking in standaard vorm.</p> <p>STAP 4: Los dan vir x op</p> <p>STAP 5: die ooreenstemmende waardes van y kan bepaal word deur die waardes van x in die liniêre vergelyking te vervang</p>
--	---

KAN JY?		
Los vir x en y gelyktydig op in die vergelyking:		Antwoorde
1.	$y = x^2 - 2$ en $y - 2x = 1$	$x = 3$ of $x = -1$ en $y = 7$ of $y = -1$ as ook $(3; 7)$ of $(-1; -1)$
2.	$y = 3x + 7$ en $y = 2x^2 + 8$	$x = \frac{1}{2}$ of $x = 1$ en $y = \frac{17}{2}$ en 10 asook $(\frac{1}{2}; \frac{17}{2})$ of $(1; 10)$
3.	$x - 3y = 1$ en $x^2 + xy + 9y^2 = 17$	$(-3; -\frac{4}{3})$ of $(4; 1)$

4.	Bereken die sny punte van die volgende grafieke : $y = 2x$ en $y = 3x^2 - 1$	$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ of $(1; 2)$

Konsolidasie

- Jy behoort nou 'n kwadratiese ongelykheid met een veranderlike op te los en grafies voor te stel.
- Jy behoort ook te weet hoe om vergelykings met twee veranderlikes een liniêr en die ander een kwadratiese algebraïes op te los.

<u>Aktiwiteit</u>	Mind Action Series bl. 41 oef 9 bl. 45 oef 11 en 12	Via Africa bl. 35 oef 9 bl. 37 oef 10	<u>Siyavula</u> Einde van hoofstuk bl. 70 bl. 76	Wiskunde in die klaskamer bl. 48 oef 2.14 bl.50 oef 2.5	Platinum bl.36 oef 8 en 9 bl.37 oef 10
--------------------------	--	--	--	---	--