VAK EN GRAAD	WISKUNDE GR 11	
KWARTAAL 2	Week 6	
ONDERWERP	TRIGONOMETRIE	
DOEL VAN DIE LES		

- Om die tekens van die verskillende Trigonometriese verhoudings in die verskillende kwadrante te bepaal. (CAST diagraml)
- Reduksie van trigonometriese verhoudings van die hoeke (nie skerp hoeke) d.i. $(180^0 \pm x)$ en $(360^0 \pm x)$, waar x ‘n skerp hoek is, tot die trigonometriese verhouding van die skerp hoek.
- Reduksie van trigonometriese verhoudings van die hoeke $(90^0 \pm x)$ tot die trigonometriese verhouding van x.
- Die skryf van Trigonometriese verhoudings van ‘n negatiewe hoek tot die trigonometriese verhouding van ‘n positiewe hoek.
- Bewys van Identitiete.

BRONNE	Papiergebaseerde bronne	Digitale bronne
	Gaan na die Trigonometrie hoofstuk in jou Wiskunde handboek.	https://www.youtube.com/watch?v=rS1T_b4WZzA https://www.youtube.com/watch?v=Dt5oEd2QWis

INLEIDING:

Liewe Leerder in graad 10 was jy bekendgestel aan Trigonometrie. Werk deur die volgende om te hersien die graad 10 trigonometrie wat jy in hierdie week se lesse benodig:

Hersiening:

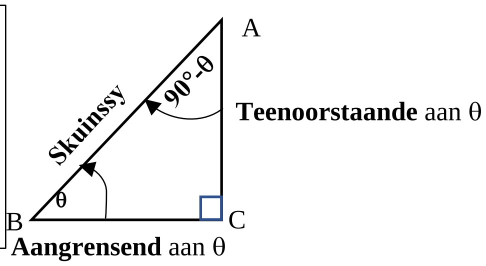
- Trigonometriese verhoudings

Opsomming:

$$\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande aan }\theta}{\text{Skuinssy}} = \frac{t}{s} \quad , \cos\theta = \frac{\text{aangrensend aan }\theta}{\text{Skuinssy}} = \frac{a}{s} \quad , \tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande aan }\theta}{\text{aangrensend aan }\theta} = \frac{t}{a}$$

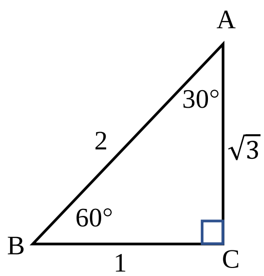
sints cosas tanta

(maak jou EIE RYMPIE om die verhoudings te onthou want dit is baie belangrik in die studie van Trigonometrie)



- Spesiale Hoeke, 0°, 30°, 45° 60° en 90° was aan jou bekendgestel.

60°/ 30° driehoek



$\sin 60° = \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{a}{s} = \frac{1}{2}$

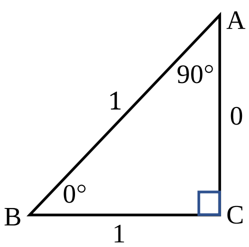
$\tan 60° = \frac{t}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{t}{s} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{a}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \frac{t}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0°/ 90° driehoek



$\sin 0° = \frac{t}{s} = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 0° = \frac{a}{s} = \frac{1}{1} = 1$

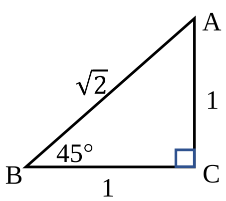
$\tan 0° = \frac{t}{a} = \frac{0}{1} = 0$

$\sin 90° = \frac{t}{s} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{a}{s} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 90° = \frac{t}{a} = \frac{1}{0} =$ **ongedefineerd**

45° driehoek



$\sin 45° = \frac{t}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

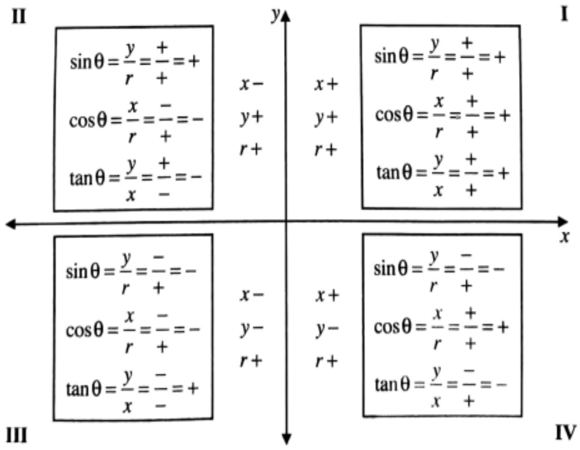
$\cos 45° = \frac{a}{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = \frac{t}{a} = \frac{1}{1} = 1$

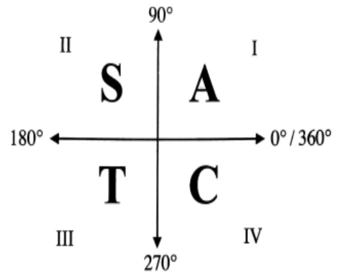
Hersiening:

TEKENS VAN TRIGOMETRIESE VERHOUDINGS

Die volgende diagram toon die tekens van x, y en r asook die tekens van die trigonometriese verhoudings in elkeen van die vier kwadrante.



Ons kan dit opsom in die sogenaamde CAST diagram



Die letters A, S, T en C dui aan watter verhouding(s) **positief** is in elke kwadrant.

In kwadrant I: **A**lle trigonometriese verhoudings is positief

In kwadrant II: **s**in is **positief** en alle ander verhoudings is negatief

In kwadrant III: **tan** is **positief** en alle ander verhoudings is negatief

In quadrant IV: cos is **positief** en alle ander verhoudings is negatief.

Voorbeeld 1:

As $3\tan\theta - 4 = 0$ and

$\theta \in (180°; 360°)$

Bepaal die waarde van

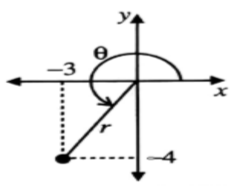
$25\sin^2\theta - 5\cos\theta$

met die hulp van ‘n diagram en sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar**.**

Oplossing:

$3\tan\theta = 4 \qquad \therefore \tan\theta = +\frac{4}{3}$

$\tan\theta = \frac{4}{3} = \frac{y}{x}$



$x^2 + y^2 = r^2$

$(-3)^2 + (-4)^2 = r^2$

$25 = r^2$

$r = 5$

$\therefore\ 25\sin^2\theta - 5\cos\theta$

$= 25\left(\frac{-4}{5}\right)^2 - 5\left(\frac{-3}{5}\right)$

$= 16 + 3 = 19$

Stappe:

1) Isoleer die trig verhouding en die teken
2) **Identifiseer die kwadrant** – ($\tan\theta$ is positief in 1ste en 3^de kwadrant), $\theta \in (180°; 360°)$- geld vir 3^de en 4^de kwadrant **(daarom 3^de kwadrant)**
3) Teken die reghoekige driehoek in kartesiese vlak in die 3^de kwadrant.
4) In die verhouding, $\tan\theta = +\frac{4}{3}$, word twee sye gegee (d.i x en y), en jy moet die 3^de sy r bepaal.
5) Nota, $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$
6) Bepaal nou vir $\sin\theta$ en $\cos\theta$ en vervang dit in die uitdrukking.
7) Bereken die waarde van die uitdrukking.

KAN JY : Beantwoord die volgende vrae.

a) As $-5\sin\theta = 4$ en $\theta \in (90°; 270°)$, bereken met die hulp van ‘n diagram en sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar die waarde van:

1) $5\cos\theta - 3\tan\theta$
2) $\frac{4}{\sin\theta} - \frac{3}{\cos\theta}$

b) As $3\tan\beta = -2$ en $\beta \in (0°; 180°)$, bereken met die hulp van ‘n diagram en sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar die waarde van

1) $\cos\beta$
2) $2\sin^2\beta - 1$
3) $\sqrt{13}\ \cos\beta - 13\sin^2\beta$

Antwoorde:

a. 1) -7

a. 2) 0

b. 1) $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

b. 2) $\left(-\frac{5}{13}\right)$

b. 3) -7

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

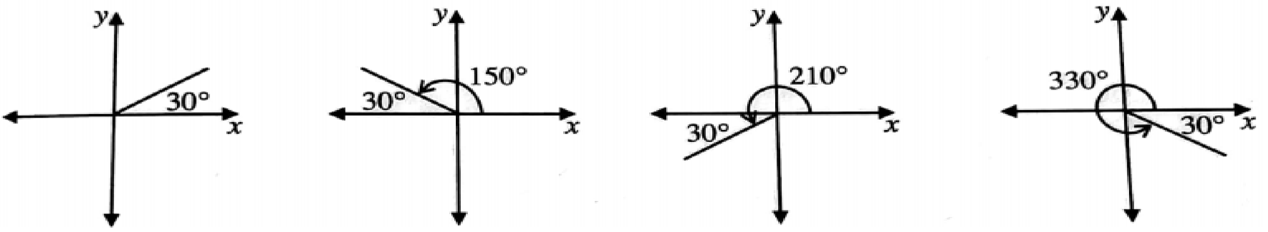
LES 1a: REDUKSIE

Reduksie is die proses waardeur ‘n trigonometriese verhouding van ‘n hoek, wat **nie ‘n skerphoek** is nie, herskryf word in terme van ‘n verhouding van ‘n **skerphoek.**

Indien ons die trigonometriese verhoudings vir die hoeke $30°;\ 150°;\ \ 210°;\ \ 330°$, op ‘n sakrekenaar bereken , kry ons:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 150° = \frac{1}{2}$	$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 210° = -\frac{1}{2}$	$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin 330° = -\frac{1}{2}$	$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

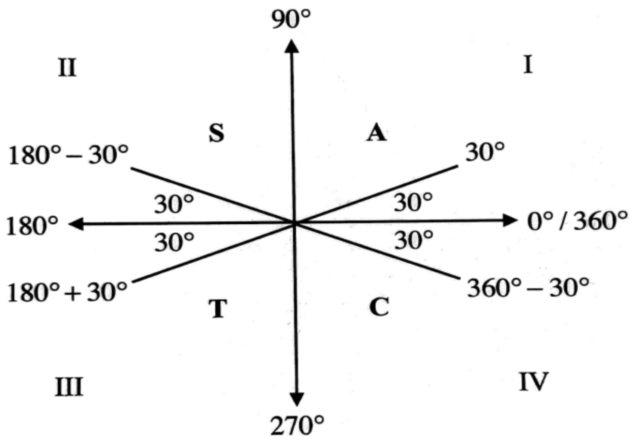
Let op dat elkeen van die trigonometriese verhoudings in dieselfde kolom dieselfde numeriese waarde het vir al vier die verskillende hoeke (alhoewel die tekens verskil). Jy sal ook oplet dat die eindstraal van elkeen van hierdie hoeke ‘n skerphoek van $30°$ vorm met die x-as.



Elke trigonometrese verhouding van elkeen van hierdie hoeke kan vervolgens geskryf word in terme van ‘n trigonometriese verhouding van $30°$:

- Die hoeke $150°,\ 210°,$ en $330°$ kan herskryf word in terme van $30°$ saam met $180°$ of $360°$:
  $150° = 180° - 30°$ $\quad$ $210° = 180° + 30°$ $\quad$ $330° = 360° - 30°$

Let op dat, in die gegewe Kartesiese vlak
$180° - 30°$: is ‘n hoek in die 2de kwadrant, enige hoek wat geskryf word as $(180° - x)$ waar x ‘n skerphoek is , lê in die 2de kwadrant .
$180° + 30°$: is ‘n hoek in die 3de kwadrant, enige hoek wat geskryf word as $(180° + x)$ waar x ‘n skerphoek is , lê in die 3de kwadrant
$360° - 30°$: is ‘n hoek in die 4de kwadrant, enige hoek wat geskryf word as $(360° - x)$ waar x ‘n skerphoek is , lê in die 4de kwadrant



- Die teken word bepaal deur die kwadrant, volgens die CAST diagram, $180° -$, $180° +$, of $360° -$ word dan weggelaat.
  In die **tweede kwadrant** $(\mathbf{180°} - \cdots)$, **is sin positief** en cos en tan is negatief:
  $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = +\sin 30°$
  $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$
  $\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30°$

  In die **derde kwadrant** $(\mathbf{180°} + \cdots)$, **is tan positief** en cos en sin is negatief:
  $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30°$
  $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30°$
  $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = +\tan 30°$

  In die **vierde kwadrant** $(\mathbf{360°} - \cdots)$, **is cos positief** en sin en tan is negatief:
  $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30°$
  $\cos 330° = \cos(360° - 30°) = +\cos 30°$
  $\tan 330° = \tan(360° - 30°) = -\tan 30°$

Veralgemening van Reduksie Formule vir $(180° \pm \theta)$ & $(360° \pm \theta)$

Beskou 'n sirkel met middelpunt O(0; 0) en radius r. Veronderstel dat $P(a;b)$, $P'(-a;b)$, $P''(-a;-b)$ en $P'''(a;-b)$ almal punte op die sirkel is. In die sketse hieronder is θ ‘n skerphoek.

OP is 'n straal met punt $P(a;b)$, en OP is in 'n antikloksgewyse rigting deur die hoek θ vanaf die x-as geroteer. Dit is die skets met P in die 1ste kwadrant. Dan kan al die trigonometriese verhoudings vir θ neergeskryf word, soos in die skets hieronder gedoen is.

OP' is 'n straal met punt $P'(-a;b)$, dit is die geval wanneer die hoek tussen OP' en die negatiewe x-as θ is. Dit beteken dat die hoek waardeur OP' gedraai word om by $P'(-a;b)$ te kom $(180° - \theta)$ moet wees. Al die trigonometriese verhoudings vir $(180° - \theta)$ kan dan neer geskryf word.

OP'' is 'n straal met punt $P''(-a;-b)$, dit is die geval wanneer die hoek tussen OP'' en die negatiewe x-as θ is. Dit beteken dat die hoek waardeur OP'' gedraai word om by $P''(-a;-b)$ te kom $(180° + \theta)$ moet wees. Al die trigonometriese verhoudings vir $(180° + \theta)$ kan dan neer geskryf word.

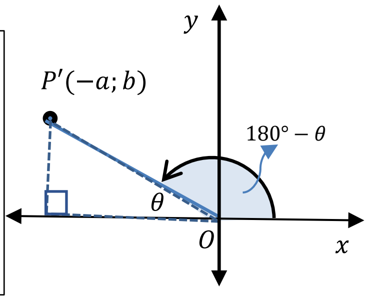
OP''' is 'n straal met punt $P'''(a;-b)$, dit is die geval wanneer die hoek tussen OP''' en die positiewe x-as θ is. Dit beteken dat die hoek waardeur OP''' gedraai word om by $P'''(a;-b)$ te kom $(360° - \theta)$ moet wees. Al die trigonometriese verhoudings vir $(360° - \theta)$ kan dan neer geskryf word.

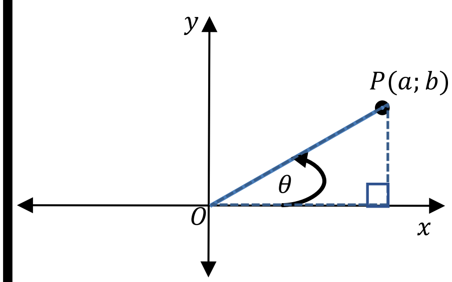
$(180° - \theta)$

$\sin(180° - \theta) = \frac{b}{r}$

$\cos(180° - \theta) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r}$

$\tan(180° - \theta) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$



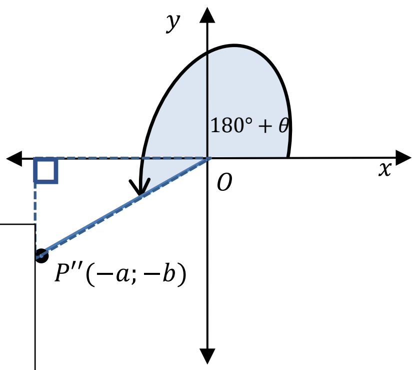


θ

$\sin\theta = \frac{b}{r}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

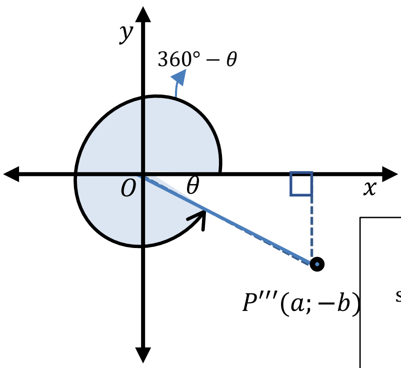


$(180° + \theta)$

$\sin(180° + \theta) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r}$

$\cos(180° + \theta) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r}$

$\tan(180° + \theta) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$



$(360° - \theta)$

$\sin(360° - \theta) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r}$

$\cos(360° - \theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{r}$

$\tan(360° - \theta) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$

Let op die volgende afleidings wat gemaak kan word vanaf bostaande:

Kwadrant I **A**	Kwadrant II **S**	Kwadrant III **T**	Kwadrant IV **C**
$\sin\theta = +\sin\theta$	$\sin(180° - \theta) = +\sin\theta$	$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
$\cos\theta = +\cos\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360° - \theta) = +\cos\theta$
$\tan\theta = +\tan\theta$	$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180° + \theta) = +\tan\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

Die bostaande is altyd waar. Jy moet dit onthou. Let op vir die hoeke $(180° - \theta)$, $(180° + \theta)$ en $(360° - \theta)$ in die tabel hierbo, word die hoek vervang met die skerp hoek θ, en die teken word bepaal deur the CAST diagram. Maak ‘n rympie vir jouself sodat jy die CAST diagram kan onthou en hoe om dit te gebruik om te bepaal in watter kwadrant elk van die verskillende trigonometriese verhoudings positief en negatief is.

Voorbeeld 2: Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. $\sin^2(180° + \theta)$	**Oplossing:** $\sin^2(180° + \theta)$ $= [\sin(180° + \theta)]^2$ $=[-\sin\theta]^2$ $= \sin^2\theta$	**Stappe:** 1) Let op, $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$ 2) Bepaal die **kwadrant** van die gegewe hoek, $(180° + \theta)$. Dit is die 3de kwadrant, in die 3de kwadrant vanaf CAST diagram, is sin negatief. Skryf neer die negatief. 3) Skryf $\boldsymbol{sin\ \theta}$ neer.
Voorbeeld 3 Reduseer die volgende tot 'n trigonometriese verhouding van 'n skerp hoek a) $\sin 150°$ b) $\tan 320°$	**Oplossing:** **a)** $\sin 150°$ $= \sin(180° - \mathbf{30°})$ $= +\sin \mathbf{30°}$ b) $\tan 320°$ $= \tan(360° - \mathbf{40°})$ $= -\tan 40°$	**Stappe:** 1) Bepaal die **kwadrant** van die gegewe hoek, 150°. Dit is in die 2de kwadrant. 2) Vervang die stomphoek, 150° as $(180° - 30°)$. 3) Vanaf die kwadrant en CAST- diagram bepaal die **teken** van *sin* in die 2de kwadrant is dit positief. Skryf neer die teken. 4) Skryf **dieselde trig verhouding van die skerp hoek 30°.** Herhaal dieselfde stappe vir b).
Voorbeeld 4 Vereenvoudig $\dfrac{\cos(180° + x).\sin(360° - x)}{\cos(x - 180°).\sin(x + 360°)}$	**Oplossing:** $\dfrac{\cos(180° + x).\sin(360° - x)}{\cos(180° - x).\sin(180° - x)}$ $= \dfrac{(-\cos x)\,(-\sin x)}{(-\cos x)\,(\sin x)}$ $= -1$	**Steps:** 1) Let op, $(180° + x)$ is in die 3rd kwadrant, cos is negatief in die 3rd kwadrant volgens die CAST diagram, daarom is, $\cos(180° + x) = -\cos x$. 2) Volg stap 1 , vir, $\sin(360° - x)$, $\cos(180° - x)$ en $\sin(180° - x)$ 3) Vereenvoudig, deur dieselfde faktore te kanselleer.
KAN JY:		
1. Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: a) $\sin(180° - \theta) + \sin(360° - \theta)$ b) $\dfrac{\cos(360° - \theta).\tan(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)}$	**2.** Reduseer die volgende tot 'n trigonometriese verhouding van 'n skerp hoek. a) $\cos 315°$ **b)** $\tan 120°$	**Antwoorde:** 1a) 0 b) $\tan\theta$ 2 a) $\cos 45°$ b) $-\tan 60°$

Hoeke groter as 360° : $(\mathbf{360°} + \boldsymbol{\theta})$

Wat van $(360° + \theta)$? As jy by 'n hoek θ begin en jy tel 360° by, is dit dieselfde as om te roteer deur 360°, dit beteken jy het 'n volle omwenteling voltooi en is dus weer by die beginpunt. As 'n omwenteling(360°) by enige hoek θ, bygetel of afgetrek word, is daar geen verandering in die posisie op die Kartiesiese vlak nie. Dus kan $(\boldsymbol{\theta} + 360°)$ **, vervang word met $\boldsymbol{\theta}$.** Dit is so vir enige veelvoud van 360°.

Nog 'n manier om daar aan te dink is, 0° en 360° is dieselfde posisie, $(\boldsymbol{\theta} + 360°)$ en $(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{0}°)$ moet dan ook dieselfde posisie wees, dit is die posisie van die hoek $\boldsymbol{\theta}$**.**

Outhou dat: $\theta + 360° = 360° + \theta$

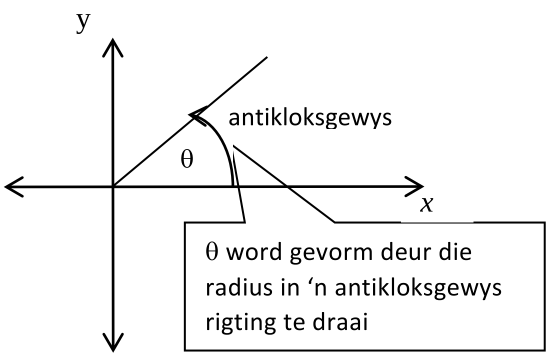
Ons kan dus aflei die onderstaande vir enige hoek θ.

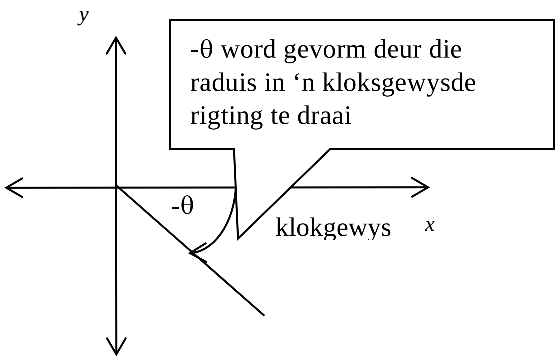
$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$	$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$	$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$

Voorbeeldes 5: a) Bepaal die waarde van, $\cos 495°$, sonder 'n sakrekenaar.	**Oplossing:** **a)** $\cos 495°$ $= \cos(360° + 135°)$ $= \cos 135°$ $= \cos(180 - 45°)$ $= (-\cos 45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	**Stappe:** 1. Die hoek 495°, is groter as 360°, dit kan dus geskryf word as, $(360° + 135°)$. 2. Gebruik die formule, $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$ 3. Om die waarde van $\cos 135°$, te bepaal, word dit in terme van 'n skerp hoek geskryf. $\cos 135°$, is 'n hoek in die 2de kwadrant en kan dus geskryf word as $(180° - 45°)$.

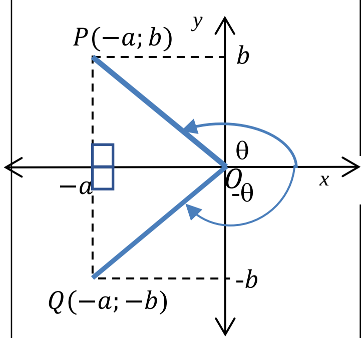
b) Vereenvoudig: $\tan(\theta - 180°)$	b) $\tan(\theta - 180°)$ $= \tan(\theta - 180° + 360°)$ $= \tan(180° + \theta)$ $= \tan\theta$	**Stappe:** 1. Dit mag onduidelik wees, in watter kwadrant $(\theta - 180°)$ is. Tel 360° by die hoek en dit word dan, $(\theta - 180° + 360°) = (180° + \theta)$, Dit is now duidelik dat die hoek in die 3rd kwadrant is. 2. Die reduksie van $\tan(180° + \theta)$, is $\tan\theta$. Volgens die CAST diagram is tan positief in die 3rd kwadrant.
Voorbeeld 6 : Vereenvoudig $\frac{\cos(360° + x).\sin(360° - x)}{\cos(x - 180°).\sin(x + 360°)}$	**Oplossing:** $\frac{\cos(360° + x).\sin(360° - x)}{\cos(x + 180°).\sin(x + 360°)}$ $= \frac{(\cos x)\ (-\sin x)}{(-\cos x)\ (\sin x)} = -1$	**Stappe:** 1) Letop die hoeke $\sin(x + 360°)$, $\cos(360° + x)$ en $\cos(x - 180°)$ 2) Gebruik die reduksie formule 3) Vereenvoudig deur dieselfde faktore te kanselleer.
CAN YOU?		
a) Determine the value of $\tan 570°$, without a calculator.	b) Vereenvoudig: $\frac{\tan(360° - x).\sin(360° + x)}{\sin(x + 180°).\tan(x - 360°)}$	**Antwoorde:** **a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** **1**

LES 1c: NEGATIEWE HOEKE

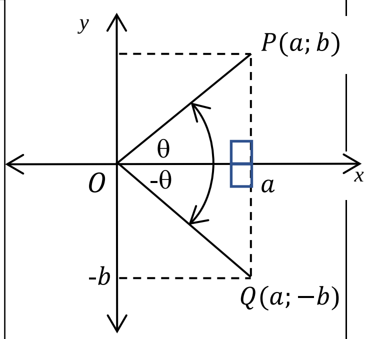




$P(-a; b)$ en $Q(-a; -b)$ is twee punte op ‘n sirkel met radius(r) en middelpunt $O(0;\ 0)$.`
OP word geroteer deur ‘n stomp hoek θ, in ‘n anti-klokgewysde rigting.
OQ word geroteer deur ‘n stomp hoek θ, in ‘n klokgewysde rigting.



$P(a; b)$ en $Q(a; -b)$ twee punte op ‘n sirkel met radius(r) en middelpunt $O(0;\ 0)$.
OP, word geroteer deur ‘n skerp hoek θ, in ‘n anti-klokgewysde rigting.
OQ word geroteer deur ‘n skerp hoek θ, in ‘n klokgewysde rigting.



θ (stomp hoek)	$-\theta$ (stomp hoek)
$\sin\theta = +\frac{b}{r}$	$\sin(-\theta) = \frac{-b}{r}$ $= -\frac{b}{r}$
$\cos\theta = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r}$	$\cos(-\theta) = \frac{-a}{r}$ $= -\frac{a}{r}$

θ (skerp hoek)	$-\theta$ (skerp hoek)
$\sin\theta = +\frac{b}{r}$	$\sin(-\theta) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r}$
$\cos\theta = +\frac{a}{r}$	$\cos(-\theta) = +\frac{a}{r}$
$\tan\theta = +\frac{b}{a}$	$\tan(-\theta) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$

Afleiding vanaf bostaande tabele:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = +\cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Dit is duidelik vanaf bostaande sketse van skerp hoeke θ sowel as vir stomp hoek θ.

Soortgelyk kan getoon word dat die afleiding waar is vir enige hoek θ.

Voorbeeld 7 : Vereenvoudig

a) $\tan(\theta - 180°)$

b)

$$\frac{\sin(-\theta).\tan(\theta-180°).\cos(180°-\theta)}{\sin(180°-\theta).\tan(-\theta).\cos(-\theta)}$$

Oplossing:

a) $\tan(\theta - 180°) = \tan[-(180° - \theta)]$

$= -\tan(180° - \theta)$

$= -(-\tan\theta)$

$= \tan\theta$

b)

$$\frac{\sin(-\theta).\tan(\theta + 180°).\cos(180° - \theta)}{\sin(180° - \theta).\tan(-\theta).\cos(-\theta)}$$

$$\frac{(-\sin\theta)\,(\tan\theta)(-\cos\theta)}{(\sin\theta)(-\tan\theta)\,(\cos\theta)}$$

$= -1$

Stappe:

a)
1. Letop dat, $(\theta - 180°)$ kan geskryf word as 'n negatiewe hoek, $[-(180° - \theta)]$
2. Gebruik dan, $\tan(-\theta) = \tan\theta$
3. Reduksie formule, $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

Nota: Hierdie vraag was gedoen in Voorbeeld 5b. Letop dat dit anders gedoen was, maar die antwoord is dieselfde.

b)

1) Letop die negatiewe hoeke $\sin(-\theta)$, $\tan(-\theta)$ and $\cos(-\theta)$.
2) Onthou om 360° by $(\theta - 180°)$ te tel. $(\theta - 180°) = -(180° - \theta)$, dit kan ook gesien word as 'n negatiewe hoek.
3) Vereenvoudig

Kan Jy:

Vereenvoudig sonder 'n sakrekenaar:

$$\frac{\tan(360° + \theta).\sin^2(-\theta)}{\sin(180° + \theta).\tan(-\theta)\sin(\theta - 360)}$$

Antwoord: 1

LES 1c: KO –FUNKSIES

$90° - \theta$

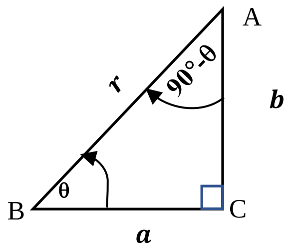
Gebruik jou sakrekenaar en maak seker of jy saamstem met die volgende aannames.

$\sin 50° = \cos 40°$ en $\cos 50° = \sin 40°$

$\sin 70° = \cos 20°$ en $\cos 70° = \sin 20°$

Let op:
1. $50° + 40° = 90°$ en $70° + 20° = 90°$
2. sin verander na cos en cos verander na sin

Kom ons ondersoek of bostaande waar is vir enige skerp θ. Neem enige reghoekige driehoek en laat die een skerphoek θ wees, die 3de hoek in die driehoek is dan $(90° - \theta)$, omdat die som van die hoeke in 'n driehoek saam 180° is. Veronderstel a, b is twee sye van die driehoek en r is die skuinssy. Sien die skets.



Ons kry die volgende vanaf die skets:

θ	$90° - \theta$
$\sin\theta = \frac{b}{r}$	$\sin(90° - \theta) = \frac{a}{r}$
$\cos\theta = \frac{a}{r}$	$\cos(90° - \theta) = \frac{b}{r}$

Afleiding vir $(90° - \theta)$:

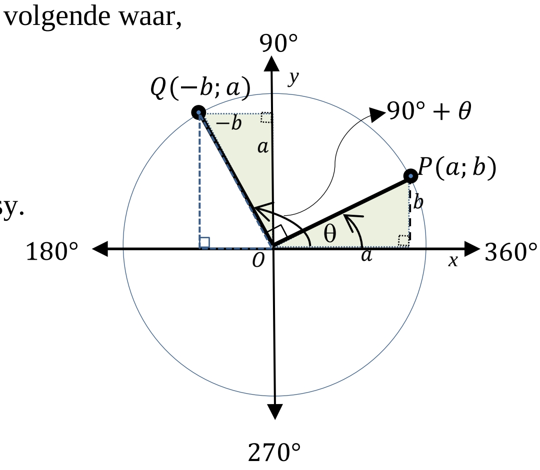
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$90° + \theta$

Beskou 'n sirkel met radius r, en middelpunte $O(0;\ 0)$ in die Kartesiese vlak. Veronderstel dat $P(a; b)$ 'n punt is op die sirkel en die middelpunt van die sirkel is O. Veronderstel dat OP maak 'n hoek θ met die positiewe x- as. Q is die punt verkry as OQ, geroteer word deur 'n hoek $(90° + \theta)$ van die x-as. Dus is die hoek tussen OQ en die y-as θ. Dit is omdat die rotasie van die x- as tot di y-as $90°$ is. Sien die gegewe skets:

So as ons die twee geskakeerde driehoeke vergelyk in die skets, is die volgende waar,



1. Die skuinssy is dieselfde
2. θ is 'n hoek in beide
3. $90°$ is 'n hoek in beide

Daarom is die twee geskakeerde driehoeke kongruent, hoek, hoek en sy.

Die koordinate van Q, moet dus $Q(-b; a)$ wees.

Ons kan nou die volgende bepaal:

θ	$90° + \theta$
$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{b}{r}$	$\sin(90° + \theta) = \frac{y}{r} = \frac{a}{r}$
$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{a}{r}$	$\cos(90° + \theta) = \frac{x}{r} = \frac{-b}{r}$

Afleiding vir $(90° + \theta)$:

$$\sin(90° + \theta) = +\cos\theta$$
$$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$

Opsomming vir $(90 \pm \theta)$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ en $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$ en $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

90° Reël

1) Bepaal die **kwadrant** van die gegewe hoek

2) Vanaf die kwadrant van die gegewe hoek bepaal die **teken** van die trigonometriese verhouding in die kwadrant.

3) Skryf neer die **ko-funksie**

4) **Reduseer** die hoek in hakies tot die **skerp hoek**.

Voorbeeld 8: Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. a) $\frac{\sin(90° - \theta).\ \sin\theta}{\cos\theta\ .\cos(90° + \theta)}$	**Oplossing:** **a)** $\frac{\sin(90°-\theta).\ \sin\theta}{\cos\theta\ .\cos(90°+\theta)}$ $\frac{(\cos\theta)\ (\sin\theta)}{(\cos\theta)\ (-\sin\theta)} = -1$	**Stappe:** Vervang 1) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ 2) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$ 3) Vereenvoudig
b) $\frac{\cos(180° - x).\cos(90° - x).\tan(-x)}{\sin(180° + x)\ .\ \sin(90° + x)}$	b) $\frac{\cos(180°-x).\cos(90°-x).\tan(-x)}{\sin(180°+x)\ .\ \sin(90°+x)}$ $= \frac{(-\cos x).(\sin x)(-\tan x)}{(-\sin x)(\cos x)} = -\tan x$	1) $\cos(180° - x) = -\cos x$ 2) $\cos(90° - x) = \sin x$ 3) $\tan(-x) = -\tan x$ 4) $\sin(180° + x) = -\sin x$ 5) $\sin(90 + x) = \cos x$ 6) Vereenvoudig
c) $\sin 110° + \cos 200° + \sin^2 315°$	c) **Oplossing:** $\sin 110° + \cos 200° + \sin^2 315°$ $= \sin(180° - 70°) + \cos(180° + 20°) + \sin^2(360° - 45°)$ $= \sin 70° - \cos 20° + \sin^2 45°$ $= \sin(90° - 20°) - \cos 20° + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ $= \cos 20° - \cos 20° + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	**Stappe:** 1) Pas die 180° en 360° Reël toe vir 110°; 200°; 315° 2) $\sin 70° = \cos 20°$ ko-funksie 3) Spesiale hoek $\sin 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 4) Vereenvoudig

<table>
<tr>
<td>KAN JY:
Vereenvoudig sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.
a) $\frac{\cos(90°-\theta).\tan(180°-\theta)}{\cos(90°+\theta)}$</td>
<td>b) $\frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(-\alpha)}$

c) $\frac{\sin 160°}{\cos 250°}$</td>
<td>ANTWOORDE:
a) $\tan\theta$
b) -1
c) -1</td>
</tr>
</table>

LES 1d: IDENTITIETE

Identiteit: Wanneer twee uitdrukkings dieselfde resultaat gee vir alle waardes van die veranderlike (waarvoor albei gedefinieer is.

<table>
<tr>
<td>Kwosiënt Identiteit :
$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$</td>
<td>Vierkant Identiteit : $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$
Ook geskryf as: $\boldsymbol{\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad = \quad (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$
$\boldsymbol{\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \quad = \quad (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$</td>
</tr>
</table>

<u>Bewys van Identitiete -Stappe</u>

1. Vereenvoudig die twee kante apart.
2. Skryf die verhoudings in terme van sin of cos daarom skryf $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ en $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
3. Gebruik die vierkant identiteit op verskillende manier waar moontlik.
   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ of $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ of $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
   Let op: $1 - \cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$ en $1 - \sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$
4. Vereenvoudig en faktoriseer sso met algebraise uitdrukkings.
5. As daar breuke is, bepaal KGV en vereenvoudig.

<table>
<tr>
<td>Voorbeeld 9: Bewys the volgende.
a) $\frac{\text{Sin}^2 x}{1-\cos x} = 1 + \cos x$</td>
<td>Oplossing:
LK $= \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$
$= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$
$= 1 + \cos x$
= RK</td>
<td>Stappe:
1) Vervang $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
2) Faktoriseer :
$1 - \cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$
3) Vereenvoudig</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $(1+\tan^2 x)(1-\sin^2 x) = 1$</td>
<td>LK $= (1+\tan^2 x)(1-\sin^2 x)$
$= \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)(1-\sin^2 x)$
$= \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)(\cos^2 x)$
$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$
$= 1$
= RK</td>
<td>Stappe:
1) Vervang $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
2) Vervang $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
3) Tel breuke op, KGV
4) Vervang $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5) Vereenvoudig</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$</td>
<td>LK $= \frac{1+\sin x}{\cos x}$
$= \frac{1+\sin x}{\cos x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$
$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$
$= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$
$= \frac{\cos x}{1-\sin x}$ = RK</td>
<td>Stappe:
1) Indien jy nie identiteite kan gebruik nie, vermenigvuldig LK met 1
2) Bepaal KGV en vereenvoudig
3) Vervang: $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
4) Vereenvoudig</td>
</tr>
</table>

KAN JY : Bewys die volgende Identitiete

1. $\sin x \,.\cos x \,.\tan x = 1 - \cos^2 x$
2. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$
3. $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$
4. $\frac{1-\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$

AKTIWITIETE:	Siyavula : (Oef 6-2 , Bl 252); (Oef 6-3, Bl 255); (Oef 6-4 , Bl 259); (Oef 6-6 , Bl 265) Mind Action series : (Oef 1- Bl 105); (Oef 2- Bl 108); (Oef 3- Bl 111); (Oef 4- Bl 114); (Oef 5- Bl 118); (Oef 6- Bl 123); (Oef 7- Bl 126) Platinum : (Oef 3- Bl 141); (Oef 5- Bl 144); (Oef 7 en 8- Bl 147); (Oef 9- Bl 149); (Oef 13- Bl 153) ; (Oef 14- Bl 154); Via Afrika : (Oef 2, Bl 154) ; (Oef 3, Bl 156) ; (Oef 5, Bl 159) ; (Oef 8- Bl 164) (Oef 13, Bl 169) ; (Oef 14- Bl 173)

KONSOLIDASIE:

1. Onthou die identiteite::

   $\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **&** : $\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

2. Verstaan die CAST diagram.
3. In A en B hieronder is 'n opsomming van die reduksieformule: Toepassing van die reduksieformules is uiters belangrik. Jy kan nie hierdie tabel memoriseer nie, dus is dit belangrik om te vestaan bepaal hoe om dit te kan bepaal.

   A: Reduksie Formules van: $(\boldsymbol{180°} \pm \boldsymbol{\theta})$ **,** $(\boldsymbol{360°} \pm \boldsymbol{\theta})$ **and** $(\boldsymbol{-\theta})$

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360° - \theta) = +\cos\theta$	$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$	$\cos(-\theta) = +\cos\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180° + \theta) = +\tan\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

   B: Reduksie Formules van: $(\boldsymbol{90°} \pm \boldsymbol{\theta})$

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin(90° + \theta) = +\cos\theta$$
$$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$

4. Identitiete : Bewyse (Toepassing van Stappe).