

VAK EN GRAAD	WISKUNDE GR 11	
KWARTAAL 2	Week 7	
ONDERWERP	TRIGONOMETRIE	
DOEL VAN DIE LES	Algemene oplossing van trigonometriese vergelykings	
BRONNE	Papiergebaseerde bronne	Digitale bronne
	Leerders gaan na die hoofstuk oor trigonometriese vergelykings in jou Wiskunde handboek.	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=0jR_D84fecY">https://www.youtube.com/watch?v=0jR_D84fecY</a> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=0jR_D84fecY">https://www.youtube.com/watch?v=0jR_D84fecY</a>
INLEIDING:	In hierdie les is die volgende voor kennis uiters belangrik: <ul style="list-style-type: none"> <li>• CAST-diagram, reduksie formules, trig identitete, ko-funksies &amp; spesiale hoeke.</li> <li>• Faktorisering: gemene faktor &amp; faktorisering van 'n kwadratiese uitdrukking.</li> <li>• Oplossing van 'n kwadratiese vergelyking.</li> <li>• Wanneer is 'n uitdrukking of vergelyking ongedefineerd.</li> </ul>	

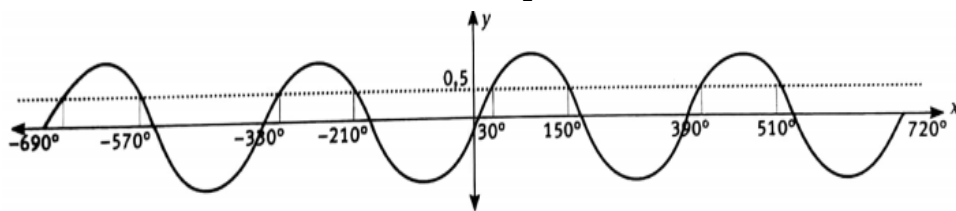
Les 1: Trigonometriese vergelykings

Beskou die vergelyking  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ .

Om die vergelyking op te los, gaan ons alle moontlike hoeke  $\theta$  moet bepaal waarvoor  $\sin \theta$  gelyk is aan  $\frac{1}{2}$ .

In die skets is  $y = \sin x$  geteken oor die interval,  $[-720^\circ; 720^\circ]$ . Die lyn,  $y = \frac{1}{2}$ , is ook geteken.

So, die oplossing van die vergelyking,  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , is in werklikheid waar die twee grafieke,



$y = \sin x$  en  $y = \frac{1}{2}$  mekaar sny.

Jy sal oplet vanaf die grafiek dat daar 'n aantal verskillende hoeke is wat 'n oplossing is vir die vergelykings,  $y = \sin x$  en  $y = \frac{1}{2}$ . Dit sal aanhou tot oneindigheid indien die interval nie beperk word nie. Op dieselfde manier sal die vergelyking,  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , 'n oneindige aantal oplossings hê.

**Let op :** Die grafiek herhaal homself elke  $360^\circ$ . So indien jy die oplossing wil bepaal van,  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , vir die interval,  $[0^\circ; 360^\circ]$ . Sal al die oplossings verkry word deur 'n veelvoud van  $360^\circ$  by te voeg of af te trek .

- Om die oplossings te bepaal, begin deur die **skerphoek** te bereken van waar al die oplossings afgelei kan word. Dit word die **verwysingshoek** genoem. Die hoek word bepaal deur die gebruik van die  $\sin^{-1}$  knoppie op die sakrekenaar.

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Verwysings } \angle = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

- Volgende kyk ons na die **teken** van die trigonometriese verhouding om die korrekte kwadrant te bepaal  $\sin \theta = +\frac{1}{2}$ , so die trigonometriese verhouding is positief

**sin is positief in kwadrant I en kwadrant II (CAST-Diagram)**

**I:**  $\theta = \text{Verwysings } \angle$   
 $\theta = 30^\circ$

**II:**  $\theta = 180^\circ - \text{Verwysings } \angle$   
 $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

- Optelling (of aftrekking) van **veelvoude van  $360^\circ$**  by elkeen help ons om al die moontlike oplossings te bepaal.

**I:**  $\theta = 30^\circ + k.360^\circ; k \in \mathbb{Z}$  of **II:**  $\theta = 150^\circ + k.360^\circ; k \in \mathbb{Z}$

Hierdie word verwys as, **Die Algemene Oplossing**.

Vir die **algeme oplossing** van 'n trigonometriese vergelyking van die vorm  $\sin \theta = a$ ,  $\cos \theta = a$  of  $\tan \theta = a$

- Bereken die verwysingshoek, deur  $\sin^{-1}$ ;  $\cos^{-1}$  of  $\tan^{-1}$  te gebruik saam met die numeriese waarde van, "a" maar die **teken van "a" te ignoreer**
- Gebruik nou die teken van "a", saam met die gegewe trig funksie, om te bepaal in watter twee kwadrante die oplossings, volgens CAST-diagram moet wees.

Kwadrant I :  $\theta = \text{verwysings } \angle + k \cdot 360^\circ$

Kwadrant II :  $\theta = 180^\circ - \text{verwysings } \angle + k \cdot 360^\circ$

Kwadrant III :  $\theta = 180^\circ + \text{verwysings } \angle + k \cdot 360^\circ$

Kwadrant IV :  $\theta = 360^\circ - \text{verwysings } \angle + k \cdot 360^\circ$

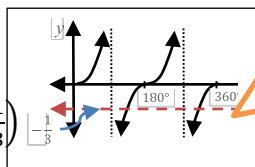
**Voorbeeld 1:**

Bepaal die algemene oplossing van  $3 \tan \theta + 1 = 0$

**Oplossing:**

$$3 \tan \theta = -1$$

$$\tan \theta = -\left(\frac{1}{3}\right)$$



**OPMERKING:** Die tan grafiek het 'n periode van  $180^\circ$ . Elke  $180^\circ$  herhaal die tan grafiek. Dus om die algemene oplossing te kry, voeg ons  $k \cdot 180^\circ$  by.

$$\text{Verwysings } \angle = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,43^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 18,43^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 161,57^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

**Antwoord:**  $\theta = 161,57^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**OF**

$$\theta = 161,57^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 341,57^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

**Stappe.**

- 1) Isoleer die trig verhouding:  $\left[\tan \theta = -\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
- 2) Bepaal die verwysingshoek ignoreer die teken van die trig verhouding. ( $\tan^{-1}$ )
- 3) tan is negatief in kwadrants 2 en 4. In Kwadrant II:  $\theta = 180^\circ - \text{verw } \angle$   
Kwadrant IV:  $\theta = 360^\circ - \text{verw } \angle$
- 4) Aangesien die tan grafiek elke  $180^\circ$  herhaal word, hoef ons nie die oplossing in die vierde kwadrant te bepaal nie. Dit is omdat die oplossing in die 2de kwadrant plus  $180^\circ$  die oplossing in die vierde kwadrant is.
- 5) Dus, vir die algemene oplossing, gebruik ons slegs die oplossing in die interval  $[0^\circ; 180^\circ]$  en voeg dan  $k \cdot 180^\circ$  by waar  $k \in \mathbb{Z}$ . Vereenvoudig

**Voorbeeld 2:** Bepaal die algemene oplossing van  $\sin 2\theta = \frac{1}{4}$

**Oplossing:**  $\sin 2\theta = \frac{1}{4}$

$$\text{Verwysings } \angle = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14,48^\circ$$

**I :**  $2\theta = 14,48^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta = 7,24^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**II :**  $2\theta = 180^\circ - 14,48^\circ + k \cdot 360$   
 $2\theta = 165,52^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta = 82,76^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**Antwoord:**  
 $\theta = 7,24^\circ + k \cdot 180^\circ$  of  $\theta = 82,76^\circ + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**Stappe.**

- 1) Bepaal die verwysingshoek soos voorheen ignoreer die teken van die trig verhouding.
- 2) sin is positief in kwadrante 1 en 2. In, Kwadrant I:  $2\theta = \text{verw } \angle$   
Kwadrant II:  $2\theta = 180^\circ - \text{verw } \angle$
- 3) Voeg,  $k \cdot 360^\circ$ , by vir die algemene oplossing.
- 4) Om vir  $\theta$  op te los deel deur 2. Maak seker jy deel elke term van die vergelyking deur 2.

**Voorbeeld 3:**

Bepaal die algemene oplossing van  $2 \cos(\theta - 20^\circ) = -\sqrt{3}$

**Oplossing:**  $2 \cos(\theta - 20^\circ) = -\sqrt{3}$

$$\cos(\theta - 20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Verwysings } \angle = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

**II :**  $\theta - 20^\circ = 180^\circ - 30^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta - 20^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta = 170^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**III :**  $\theta - 20^\circ = 180^\circ + 30^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta - 20^\circ = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $\theta = 230^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**Antwoord:**  
 $\theta = 170^\circ + k \cdot 360^\circ$  of  $\theta = 230^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z}$

**Stappe.**

- 1) Isoleer die trig verhouding,  $\cos(\theta - 20^\circ)$ .
- 2) Bepaal die verwysingshoek soos voorheen, ignoreer die teken voor  $\sqrt{3}$ .
- 3) cos is negatief in kwadrante 2 en 3. In, Kwadrant II:  $(\theta - 20^\circ) = 180^\circ - \text{verw } \angle$   
Kwadrant III:  $(\theta - 20^\circ) = 180^\circ + \text{verw } \angle$
- 4) Voeg  $k \cdot 360^\circ$  by vir die algemene oplossing
- 5) Om vir  $\theta$  op te los voeg  $20^\circ$  by aan beide kante van vergelyking.

<p><b>KAN JY :</b> Bepaal die algemene oplossing van</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\cos x = 0,4</math></li> <li>2) <math>3 \sin x = 2</math></li> <li>3) <math>\tan(\alpha - 20^\circ) = -3</math></li> <li>4) <math>3 \tan(3\theta - 30^\circ) - 3 = 0</math></li> </ol>	<p><b>Antwoord:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x = 66,42^\circ + k.360^\circ</math> of <math>x = 293,58^\circ + k.360^\circ; k \in Z</math></li> <li>2. <math>x = 41,81^\circ + k.360^\circ</math> of <math>x = 138,19^\circ + k.360^\circ; k \in Z</math></li> <li>3. <math>\alpha = 128,43^\circ + k.180^\circ</math> <b>OF</b> <math>\alpha = 128,43^\circ + k.360^\circ</math> or <math>\alpha = 308,43^\circ + k.360^\circ; k \in Z</math></li> <li>4. <math>\theta = 25^\circ + k.60^\circ; k \in Z</math> <b>OF</b> <math>\theta = 25^\circ + k.120^\circ</math> of <math>\theta = 85^\circ + k.120^\circ; k \in Z</math></li> </ol>
---	--

**Les 2: Die bepaling van oplossings in 'n gegewe interval**  
Soms moet ons die oplossings van trigonometriese vergelykings bepaal wat in 'n spesifieke interval lê.

<p><b>Voorbeeld 4:</b> Los op vir <math>\theta</math> as</p> <p><math>\sin \theta = -\frac{1}{5}</math> en <math>\theta \in [-360^\circ; 360^\circ]</math>.</p> <p><b>Oplossing:</b> <math>\sin \theta = -\frac{1}{5}</math> Verwysings <math>\angle = \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 11,54^\circ</math></p> <p><b>III:</b> <math>\theta = 180^\circ + 11,54^\circ + k.360^\circ</math> <math>\theta = 191,54^\circ + k.360^\circ; k \in Z</math></p> <p><b>IV:</b> <math>\theta = 360^\circ - 11,54^\circ + k.360^\circ</math> <math>\theta = 348,46^\circ + k.360^\circ; k \in Z</math></p> <p>Die Algemene Oplossing: <math>\theta = 191,54^\circ + k.360^\circ</math> of <math>\theta = 348,46^\circ + k.360^\circ</math>; where <math>k \in Z</math></p> <p><math>\therefore \theta \in \{-168,46^\circ; -11,54^\circ; 191,54^\circ; 348,46^\circ\}</math></p>	<p><b>Stappe.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Bepaal die verwysingshoek en ignoreer die teken van die trig verhouding.</li> <li>2) sin is negatief in kwadrante 3 en 4. In Kwadrant III: <math>\theta = 180^\circ + \text{verw } \angle</math> Kwadrant IV: <math>\theta = 360^\circ - \text{verw } \angle</math></li> <li>3) Voeg <math>k.360^\circ</math> by vir die algemene oplossing</li> <li>4) Vir 'n spesifieke oplossing, vervang die heelgetal waardes van <math>k</math> in die algemene oplossing.</li> <li>5) Begin met 0, 1, 2 en dan -1, -2 ens. as waarde(s) vir <math>k</math>, om die hoek <math>\theta</math> te bepaal totdat dit buite die gegewe interval lê. Beskou onderstaande:</li> </ol> <p><math>k = 0 : \theta = 191,54 + (0).360 = 191,54^\circ</math> ✓  <math>k = 1 : \theta = 191,54 + (1).360 = 551,54^\circ</math> ✗  <math>k = -1 : \theta = 191,54 + (-1).360 = -168,46^\circ</math> ✓  <math>k = -2 : \theta = 191,54 + (-2).360 = -528,46^\circ</math> ✗</p> <p><math>k = 0 : \theta = 348,46^\circ + (0).360 = 348,46^\circ</math> ✓  <math>k = 1 : \theta = 348,46^\circ + (1).360 = 708,46^\circ</math> ✗  <math>k = -1 : \theta = 348,46^\circ + (-1).360 = -11,54^\circ</math> ✓  <math>k = -2 : \theta = 348,46^\circ + (-2).360 = -371,54^\circ</math> ✗</p>
--	--

<p><b>KAN JY:</b> Los op die volgende vergelykings vir die gegewe interval:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>5 \sin \theta = 2; \theta \in [-360^\circ; 360^\circ]</math></li> <li>2) <math>3 \tan \theta + 3 = 0; \theta \in [-720^\circ; 0^\circ]</math></li> </ol>	<p><b>Antwoorde:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\theta \in \{-336,42^\circ; -203,58^\circ; 23,58^\circ; 156,42^\circ\}</math></li> <li>2) <math>\theta \in \{-585^\circ; -405^\circ; -225^\circ; -45^\circ\}</math></li> </ol>
--	---

### Les 3 : Die gebruik van Faktorisering en Identiteite:

Faktorisering word vereis om sekere trigonometriese vergelykings op te los.

Let op vir die volgende tipes van **Faktorisering**

- Gemene faktor:  $\sin x + 3\sin x \cdot \cos x = 0$
- Verskil tussen vierkante :  $\sin^2 x - 9\cos^2 x = 0$
- Drieterm:  $\sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x = 0$

#### Voorbeeld 5

Bepaal die algemene oplossing van  $2\sin^2\theta = \sin\theta$

**Oplossing:**  $2\sin^2\theta = \sin\theta$

$$2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \text{ of } 2\sin\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \text{ of } \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = 0$$

Verwysings  $\angle = \sin^{-1}(0) = 0^\circ$

$$\theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

**Of**

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

Verwysings  $\angle = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

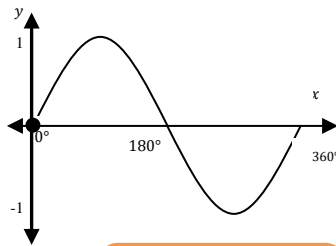
$$\theta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 150^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}$$

**Antwoord:**

$$\therefore \sin\theta = 0 : \theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} : \theta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 150^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}$$



Dit word maklik vanaf die grafiek gelees.

#### Stappe.

- 1) Let op die vergelyking is kwadrates, dit kan dus geskryf word in die standaard vorm van 'n kwadratiese vergelyking d.w.s  $ax^2 + bx = 0$ , waar,  $c = 0$ .
- 2) Faktoreer – gemene faktor
- 3) Onthou as:  $A \cdot B = 0$ , dan is  $A = 0$  of  $B = 0$ .  
Wat dan lei tot twee trig vergelykings wat op gelos moet word
- 4) Bepaal die verwysingshoek
- 5) Gebruik die **teken** om te bepaal in watter kwadrant sin positief is. Dit is die 1<sup>ste</sup> en 2<sup>de</sup> kwadrant. Let op dat die oplossing van,  $\sin\theta = 0$ , maklik vanaf die sin grafiek gelees kan word. Dit is waar die sin grafiek die x-as sny, by  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  en  $360^\circ$ .  $360^\circ$  is nie nodig nie, want dit is  $0^\circ + 360^\circ$ .
- 7) Voeg  $k \cdot 360^\circ$  by vir die algemene oplossing.

**Gebruik van Identiteite vir die oplos van vergelykings:** 1)  $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$       2)  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

#### Voorbeeld 6

Bepaal die algemene oplossing van  $3\sin\theta + 4\cos\theta = 0$

**Oplossing:**  $3\sin\theta + 4\cos\theta = 0$

$$3\sin\theta = -4\cos\theta$$

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-4\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$3\tan\theta = -4$$

$$\tan\theta = -\frac{4}{3}$$

Verwysings  $\angle = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ$

$$\theta = 126,87^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in \mathbb{Z}$$

**Antwoord:**

$$\theta = 126,87^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in \mathbb{Z}$$

**OF**

$$\theta = 126,87^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } \theta = 306^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}$$

#### Stappe.

- 1) **Let op twee verskillende verhoudings maar dieselfde hoek.**
- 2) Deel deur  $\cos\theta$  aan beide kante van vergelyking.
- 3) Maak gebruik van identiteite om te vereenvoudig na een trig verhouding.
- 4) Isoleer die trig verhouding.
- 5) Bepaal die verwysingshoek
- 6) Gebruik die **teken** om te bepaal in watter kwadrant tan negatief is.
- 7) tan is negatief in 2<sup>de</sup> en 4<sup>de</sup> kwadrant. In,  
Kwadrant II:  $\theta = 180^\circ - \text{verw } \angle$   
Kwadrant IV:  $\theta = 360^\circ - \text{verw } \angle$
- 8) Aangesien die tan grafiek elke  $180^\circ$  herhaal word, hoef ons nie die oplossing in die vierde kwadrant te bepaal nie. Dit is omdat die oplossing in die 2de kwadrant plus  $180^\circ$  die oplossing in die vierde kwadrant is.
- 9) Dus, vir die algemene oplossing, gebruik ons slegs die oplossing in die interval  $[0^\circ; 180^\circ]$  en voeg dan  $k \cdot 180^\circ$  by waar  $k \in \mathbb{Z}$ . Vereenvoudig

<p><b>Voorbeeld 7</b> Bepaal die algemene oplossing van <math>2\cos^2\theta = \sin\theta + 1</math></p> <p><b>Oplossing :</b>  <math display="block">2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0</math> <math display="block">2(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta - 1 = 0</math> <math display="block">2 - 2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0</math> <math display="block">2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0</math> <math display="block">(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0</math> <math display="block">\sin\theta = \frac{1}{2} \text{ of } \sin\theta = -1</math></p> <p>Verwysings <math>\angle = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ</math>  <math>\theta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of <math>\theta = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ</math></p> <p><b>OF</b></p> <p>Verwysings <math>\angle = \sin^{-1}(1) = 90^\circ</math>  <math>\theta = 180^\circ + 90^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></p> <p><b>Antwoord:</b>  <math>\theta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of <math>\theta = 150^\circ + k \cdot 360^\circ</math>  <b>Of</b> <math>\theta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></p>	<p><b>Stappe.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Gebruik, Trig Identiteit, <math>\cos^2x = 1 - \sin^2x</math></li> <li>2) Vereenvoudig.</li> <li>3) Let op die vergelyking is kwadratiese, dit kan dus geskryf word in die vorm, <math>ax^2 + bx + c = 0</math>.</li> <li>4) Faktoriseer die kwadratiese drieterm</li> <li>5) Onthou as <math>A \cdot B = 0</math>, dan is <math>A = 0</math> of <math>B = 0</math>. Wat dan lei tot twee trig vergelykings wat op gelos moet word. Los beide vergelykings afsonderlik op.</li> <li>6) Isoleer die trig verhouding.</li> <li>7) Bepaal die verwysingshoeke.</li> <li>8) Gebruik die <b>teken</b> om te bepaal in watter kwadrant die trig verhouding positief is.</li> <li>9) sin is positief in 1<sup>ste</sup> en 2<sup>de</sup> kwadrant En sin is negatief in 3<sup>de</sup> en 4<sup>de</sup> kwadrant</li> </ol> <p><b>NB:</b> Die vergelyking, <math>\sin\theta = -1</math>, kan maklik opgelos word deur gebruik te maak van die sin grafiek. Kyk na die skets van die sine grafiek wat gegee is in die oplossing van voorbeeld 5, jy sal dan sien dat, <math>\sin 270^\circ = -1</math>.</p>
<p><b>Voorbeeld 8</b> Bepaal die algemene oplossing van <math>\cos\theta = -\cos 2\theta</math></p> <p><b>Oplossing:</b> <math>\cos\theta = -\cos 2\theta</math>  <b>Cos <math>\theta = \cos(180^\circ - 2\theta)</math></b></p> <p><b>II</b> <math>\theta = 180^\circ - 2\theta + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math>  <math>\therefore 3\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ</math>  <math>\therefore \theta = 60^\circ + k \cdot 120^\circ</math></p> <p><b>III</b> <b>cos <math>\theta = \cos(180^\circ + 2\theta)</math></b>  <math>\theta = 180^\circ + 2\theta + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math>  <math>\therefore -\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ</math>  <math>\therefore \theta = -180^\circ - k \cdot 360^\circ</math></p> <p><b>Antwoord:</b>  <math>\theta = 60^\circ + k \cdot 120^\circ</math> of <math>\theta = -180^\circ - k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></p>	<p><b>Stappe.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <b>Let op dieselfde verhouding maar verskillende hoeke</b></li> <li>2) Onthou vanaf CAST diagram:  <math>\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta</math>  <math>\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta</math>  <math>\therefore -\cos 2\theta = \cos(180^\circ - 2\theta)</math>  <math>\therefore -\cos 2\theta = \cos(180^\circ + 2\theta)</math></li> <li>3. Let wel: As <math>\cos A = \cos B</math> dan is  <math>A = B + k \cdot 360^\circ</math></li> </ol>
<p><b>KAN JY :</b> Los op die volgende vergelykings.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>5\cos^2\theta \cdot \cos\theta = 0</math></li> <li>2) <math>5\sin A = 3\cos A</math></li> <li>3) <math>5 - 4\sin^2\theta + 4\cos\theta = 0</math></li> <li>4) <math>\sin 2\theta = \sin(\theta - 30^\circ)</math></li> </ol>	<p><b>Antwoord:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\theta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of <math>\theta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></li> <li>2) <math>A = 30,96^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of  <math>A = 210^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></li> <li>3) <math>\theta = 120^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of <math>\theta = 240^\circ + k \cdot 360^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></li> <li>4) <math>\theta = -30^\circ + k \cdot 360^\circ</math> of <math>\theta = 70^\circ + k \cdot 120^\circ ; k \in \mathbb{Z}</math></li> </ol>
<p><b>Voorbeeld 9 Ko-Funksies</b> Bepaal die algemene oplossing van  <math>\sin(\theta + 20^\circ) = \cos 2\theta</math></p> <p><b>Oplossing:</b> <math>\sin(\theta + 20^\circ) = \cos 2\theta</math>  <math>\sin(\theta + 20^\circ) = \sin(90^\circ - 2\theta)</math>  Verwysings <math>\angle = (90^\circ - 2\theta)</math></p>	<p><b>Stappe.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <b>Let op verskillende verhoudings en verskillende hoeke.</b></li> <li>2) <b>Ko-funksies:</b> Vervang <math>\cos 2\theta = \sin(90^\circ - 2\theta)</math></li> <li>3) Nou is verhoudings dieselfde en die hoeke verskillend.</li> </ol>

<p><b>I:</b> <math>\theta + 20^\circ = 90^\circ - 2\theta + k \cdot 360^\circ</math>  <math>3\theta = 70^\circ + k \cdot 360^\circ</math>  <math>\theta = 23,33^\circ + k \cdot 120^\circ; k \in Z</math></p> <p><b>II:</b> <math>\theta + 20^\circ = 180^\circ - (90^\circ - 2\theta) + k \cdot 360^\circ</math>  <math>-\theta = 70^\circ + k \cdot 360^\circ</math>  <math>\theta = -70^\circ - k \cdot 360^\circ; k \in Z</math></p> <p><b>Antwoord:</b>  <math>\theta = 23,33^\circ + k \cdot 120^\circ</math> of <math>\theta = -70^\circ - k \cdot 360^\circ; k \in Z</math></p>	<p>4) Gebruik die <b>teken</b> om te bepaal in watter kwadrant sin positief is d.w.s . 1<sup>ste</sup> en 2<sup>de</sup> kwadrant</p> <p>5) Los op vir <math>\theta</math></p>
---	--

**Les 4:**

**‘n Identiteit is ongedefinieerd wanneer:**

- 1) enige noemer gelyk is aan nul, d.i. deling deur nul
- 2)  $\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in Z$ . en die identiteit bevat tan  $\theta$

<p><b>Voorbeeld 10</b></p> <p>Vir watter waardes van <math>\theta</math> is die identiteit</p> $\frac{\tan \theta + \sin \theta}{1 + \frac{1}{\cos \theta}} = \sin \theta$ <p>ongedefinieerd</p>	<p><b>Oplossing:</b></p> $\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in Z \text{ of}$ $1 + \frac{1}{\cos \theta} = 0$ $\frac{1}{\cos \theta} = -1$ $\therefore \cos \theta = -1$ $\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in Z$ <p><b>Antwoord:</b></p> $\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ of } \theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in Z$	<p><b>Stappe.</b></p> <p>1) tan <math>\theta</math></p> <p>2) stel noemer gelyk aan nul</p>
--	--	---

<p><b>KAN JY :</b></p> <p>Vir watter waardes van <math>\theta</math> is die volgende identiteite ongedefinieerd</p> <p>1) <math>\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\tan \theta}</math>                      2) <math>\frac{1}{1-\sin \theta} + \frac{1}{1+\sin \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}</math></p>	<p><b>Antwoord:</b></p> <p>1) <math>\theta = 0^\circ + k \cdot 180^\circ</math> of <math>\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in Z</math></p> <p>2) <math>\theta = 90^\circ + k \cdot 180^\circ ; k \in Z</math></p>
---	--

	Siyavula	Mind Action series	Platinum	Via Afrika
<b>AKTIWITIETE/ASSESSERING</b>	Oef 6-7, Bl 269 Oef 6-8, Bl 275 Oef 6-9 , Bl 280	Oef 9- Bl 131 Oef 10- Bl 133 Oef 11- Bl 137 Oef 12- Bl 139 Oef 13- Bl 140	Oef 15- Bl 155 Oef 16- Bl 157 Oef 17- Bl 158 Oef 18- Bl 159 Oef 19&20- Bl 161 Oef 21- Bl 162	Oef 16, Bl 179 Oef 17, Bl 180 Oef 18& 19, Bl 181 Oef 20& 21, Bl 183

<b>KONSOLIDASIE</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Isoleer die Trigonometriese verhoudings(standaard vorm) :</li> <li>• Bepaal die verwysingshoek.</li> <li>• Gebruik CAST-diagram om te bepaal in watter kwadrant die hoek lê.</li> <li>• Spesiale gevalle: 1) meer as een verskillende verhouding  2) Identiteite  3) Dieselfde verhouding maar verskillende hoeke  4) Vir ‘n gegewe interval</li> </ul>
---------------------	--