

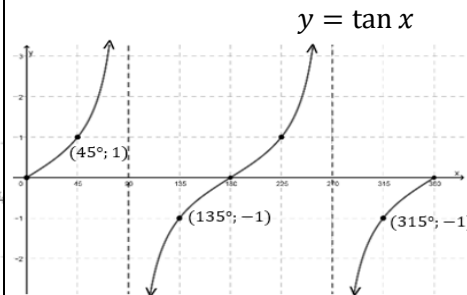
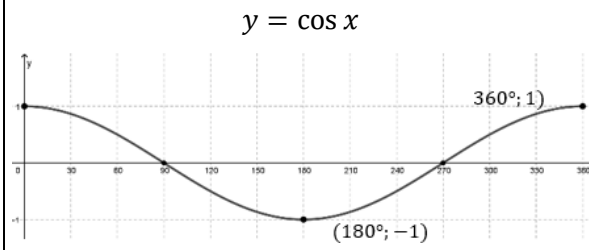
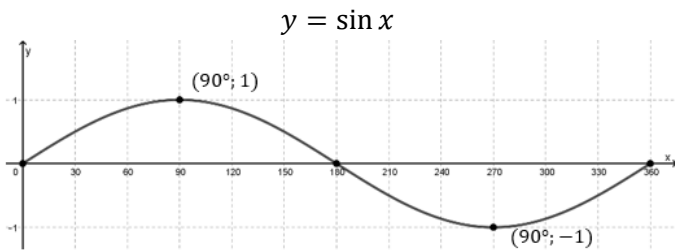


VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 11	
KWARTAAL 3	Week 4	
ONDERWERP	Trigonometriese Funksies	
DOEL VAN LES	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Om die effek van <math>k</math> en <math>p</math> op die trigonometriese funksies te bepaal: <math>y = \sin kx</math> en <math>y = \sin(x + p)</math></li> <li>• Teken grafieke met verskillende periodes en horisontale verskuiwings.</li> <li>• Trigonometriese funksies te kan interpreter</li> </ul>	
BRONNE	<b>Papiergebaseerde bronne</b>	<b>Digitale bronne</b>
	Verwys na Trigonometriese funksies in jou handbook.	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=bRSrA3Wf8FI">https://www.youtube.com/watch?v=bRSrA3Wf8FI</a> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=qFhcKqOXyQI">https://www.youtube.com/watch?v=qFhcKqOXyQI</a>

INTLEIDING:  $y = a \sin x + q$  ;  $y = a \cos x + q$  and  $y = a \tan x + q$

Die fokus in graad 10 was die effek van  $a$  en  $q$  op die trigonometriese grafiek. Ons het ontdek dat  $a$  'n invloed op die amplitude het terwyl  $+q$  die grafiek  $q$  eenhede opwaarts skuif en  $-q$  die grafiek  $q$  eenhede afwaarts skuif.

Die drie basiese grafieke:

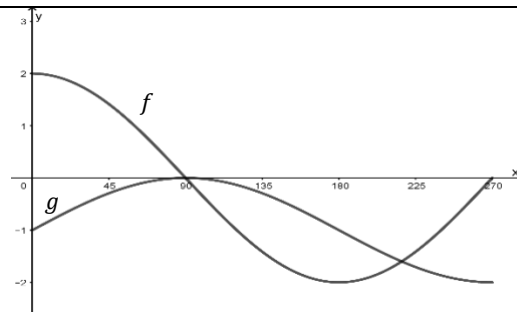


**Hoeveel kan jy nog onthou?**

In die meegaande diagram is die grafieke van:

$f(x) = a \cos x$  en  $g(x) = b \sin x - q$

1. Skryf die amplitude van  $g$  neer.
2. Skryf die waardes van  $a, b$  en  $q$  neer.
3. Wat is the terrein van  $g$ .



**Oplossings:**

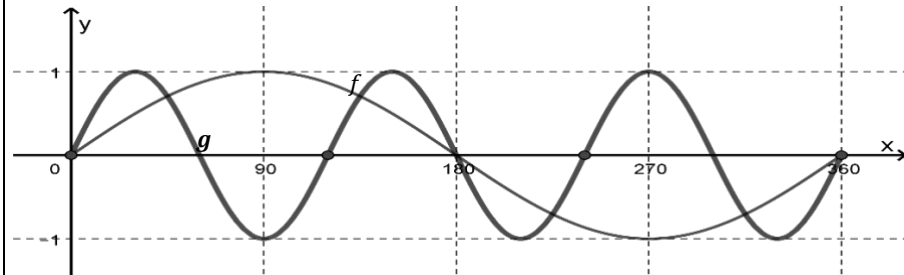
1. amplitude: 1
2.  $a = 2$ ,  $b = 1$  en  $q = 1$ .
3. Die terrein van  $g$ :  $y \in [-2; 0]$  vir  $y \in \mathbb{R}$



KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

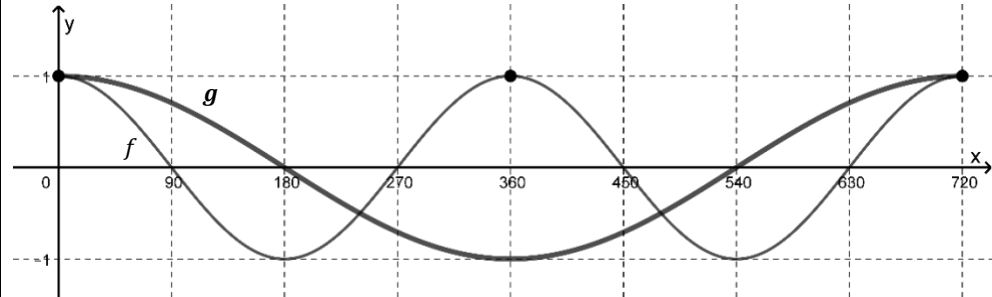
Ons gaan die effek van  $k$  in  $y = \sin kx$  en  $y = \cos kx$  ondersoek. Bestudeer die grafieke hieronder. Watter verskille kan jy opmerk?

$f(x) = \sin x$  en  $g(x) = \sin 3x$   
vir  $x \in [0^\circ; 360^\circ]$ .



Daar is 3 sikkusse binne die normale ( $360^\circ$ ) periode.  
Die periode van  $g(x)$  is  $120^\circ$

$f(x) = \cos x$  en  $g(x) = \cos \frac{1}{2}x$   
vir  $x \in [0^\circ; 720^\circ]$



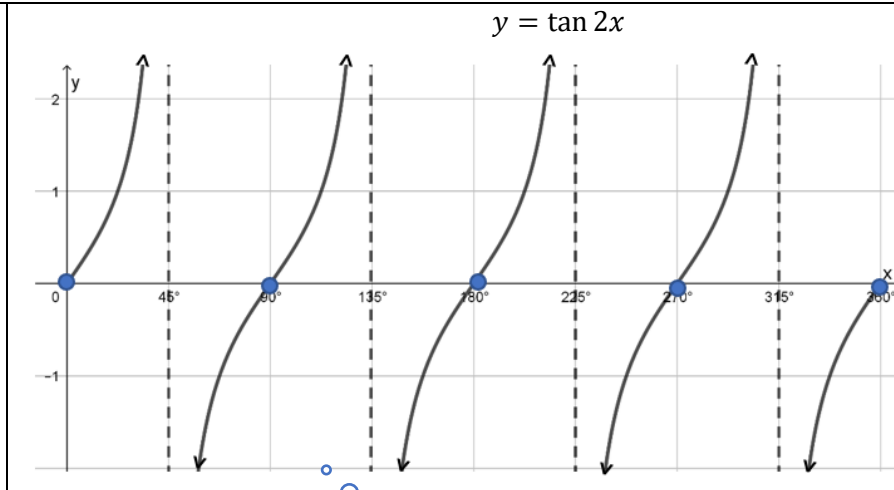
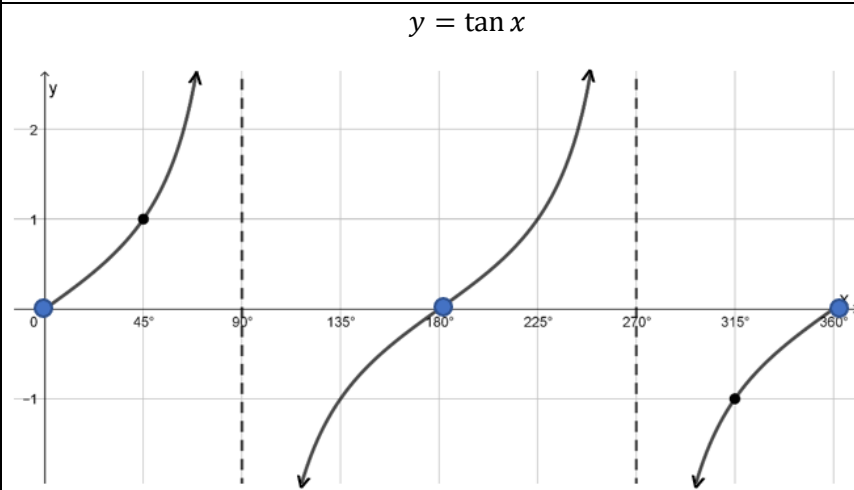
$g(x)$  is slegs die helfte van 'n normale periode.  
Die periode van  $g(x)$  sal by  $720^\circ$  eindig.

Voltooi die tabel vir die bostaande grafieke:

Funksie	Waarde van $k$	Aantal volle sikkusse	Periode	Berekeninge
$y = \sin x$	1	1	$360^\circ$	Normale period
$y = \sin 3x$		3	$120^\circ$	$\frac{360}{3} = 120^\circ$
$y = \cos x$	1			Normaal period
$y = \cos \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}$		$720^\circ$	$\frac{360^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ \times 2 = 720^\circ$



Ons kan dus dieselfde van die tan grafiek verwag. Hieronder is die twee grafieke op verskillende asestelsels.



Vanaf die bostaande, kan ons aflei dat die periode van  $y = \tan 2x$

$$= \frac{\text{normaal}}{k} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Grafiek herhaal elke 90°

**Voorbeeld 1:**

Bepaal die amplitude en periode van die volgende:

$$y = -\cos \frac{3x}{2} + 1$$

$$a = -1 \therefore \text{amplitude} = 1$$

$$\text{Periode} = \frac{\text{normale periode}}{k} = \frac{360^\circ}{\frac{3}{2}} = 240^\circ$$

Onthou:  
 $y = a \cos kx + q$

Sakrekenaar kan gebruik word!

**Kan jy?**

Skryf die amplitude, periode, gebied en terrain van elk van die volgende funksies:

1.  $y = 2 \sin x$
2.  $y = 2 \cos 2x + 1$
3.  $y = 3 \sin \frac{x}{2}$
4.  $y = \tan \frac{1}{3}x - 1$



**Voorbeeld 2:**

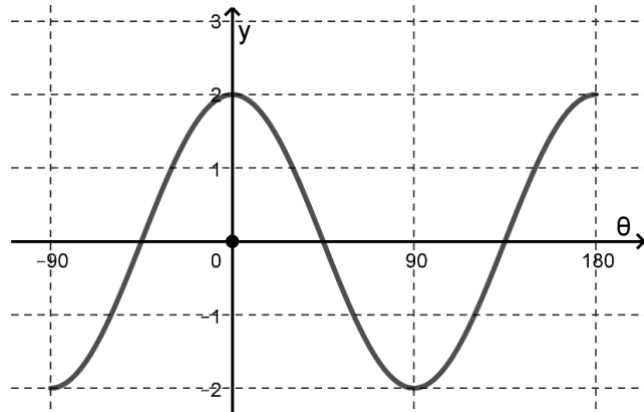
Teken die grafiek van  $y = 2 \cos 2\theta$  vir  $\theta \in [-90^\circ; 180^\circ]$

**Oplossing:**

**Informasie:**

Amplitude = 2

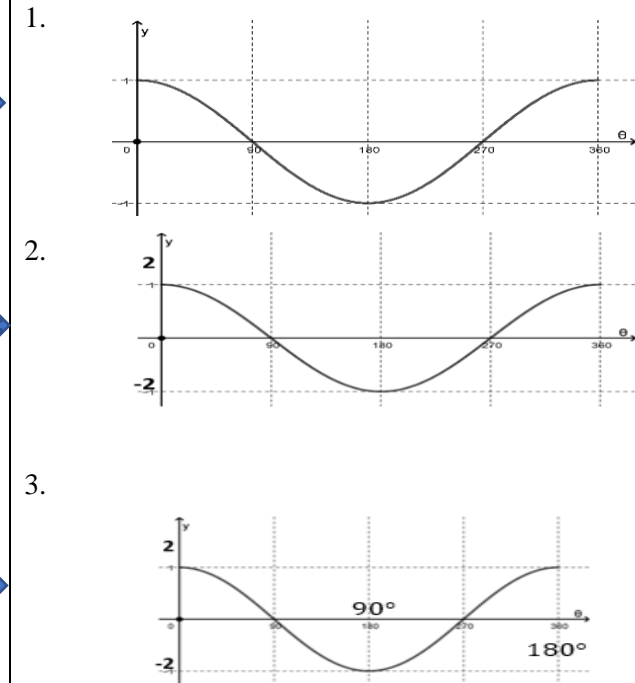
Periode:  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$



**Wenke:**

1. Trek 'n ruwe skets van die basiese grafiek op die regterkant van jou bladsy. →
2. Watter veranderinge is nodig? →  
 **$a = 2$ . Maak die verandering on die skets.**
3. Bepaal die nuwe periode. Voeg veranderinge on die skets. →
- ← 4. Trek die finale grafiek vir die vereiste gebied.

**Rough work**



**KAN JY?**

Teken netjiese sketse van die volgende funksies:

1.  $f(x) = -\sin \frac{x}{2}$  vir  $x \in [-90^\circ; 90^\circ]$
2.  $g(x) = \cos 2x$  vir  $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$
3.  $h(x) = 2 \cos 3x$  vir  $x \in [-120^\circ; 90^\circ]$
4.  $k(x) = -\tan 2x - 1$  vir  $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$

- Begin altyd met die basiese grafiek
- Periode en gebied is belangrik
- Toon alle belangrike punte

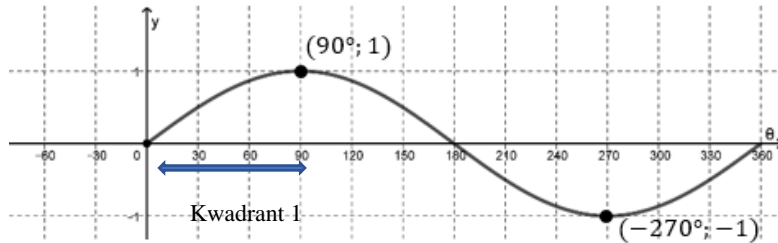


**Die effek van  $p$  in  $y = a \sin k(x + p) + q$**

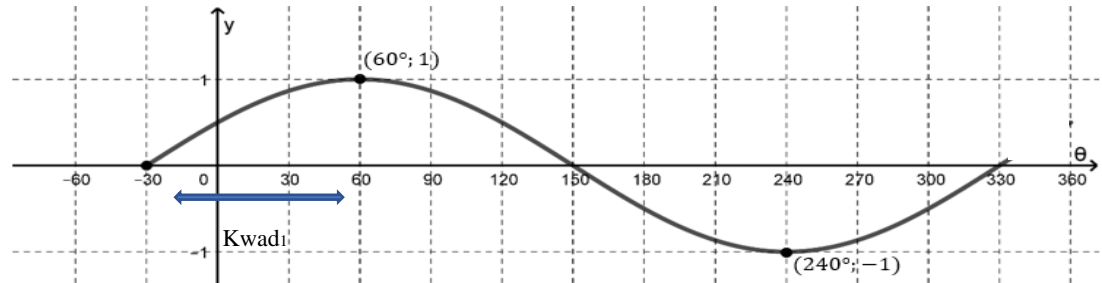
Net soos in Funksies, kan ons verwag dat  $p$  'n soortgelyke invloed op die trigonometriese funksie sal hê. Ons verwag 'n transformasie na links of regs. Dus 'n **horizontale skuif**.

Hieronder is die funksies van  $\sin x$  en  $y = \sin(x + 30^\circ)$ :

$y = \sin x$  vir  $x \in [0^\circ; 360^\circ]$



$y = \sin(x + 30^\circ)$  vir  $x \in [-30^\circ; 300^\circ]$



**Neem asseblief kennis:**

- Die siklus begin by  $0^\circ$
- Die maksimum is by  $90^\circ$ .
- Die siklus eindig by  $360^\circ$ .
- Vergelyk die kwadrante en punte

**Voltooi die sinne hieronder:**

- Die siklus begin by .....
- Die maksimum is by .....
- Die siklus eindig by .....
- Ons kan dus sê dat die grafiek ..... na links geskuif het.
- Skryf u afleidings rakende die kwadrante en hoofpunte op die grafiek neer.

.....

.....

.....

.....

**Neem kennis asseblief:**

Die waarde van  $p$  in die funksie  $y = a \sin k(x + p) + q$

Vir  $(x + p)$  skuif na links

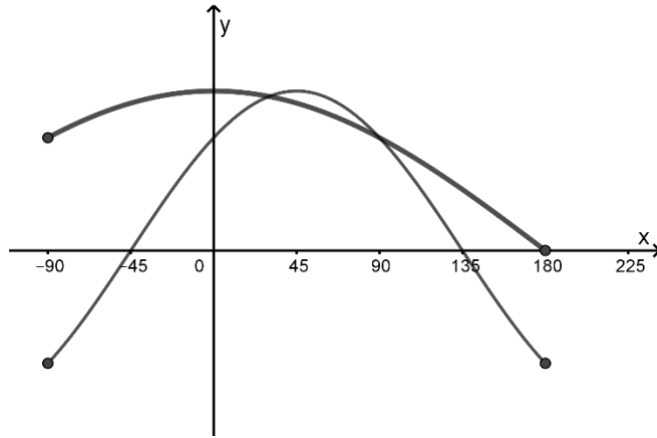
Vir  $(x - p)$  skuif na regs





**Voorbeeld 3:**

Die diagram toon die grafieke van  $f(x) = \sin(x + p)$  en  $g(x) = \cos ax$ ;  $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$ .



1. Bepaal die waardes van values of  $p$  en  $a$ .
2. Wat is die periode van  $g$ .
3. Bepaal die terrein van  $k$ , as  $k(x) = f(x) - 1$ .

**Oplossing:**

1.  $p = 45^\circ$

$a = \frac{1}{2}$

2. Periode:  $720^\circ$

3. Terrein  $y \in [-2; 0]$ ;  $y \in \mathbb{R}$



**Wenke / redenasies**

1. Die basiese  $\sin x$  funksie begin by 0. Die funksie  $n$   $f$  begin by  $-45^\circ$ . Die grafiek het  $45^\circ$  na links beweeg. Die funksie is dus  $f(x) = \sin(x + 45^\circ)$

2. Die periode van  $\cos$  grafiek is  $360^\circ$ . Vanaf  $0^\circ$  tot  $180^\circ$  verteenwoordig kwadrant 1 van die funksie. 4 kwadrante sal dus  $4 \times 180^\circ = 720^\circ$ . Om die periode te bereken, gebruik ons die formule:

$$\text{Periode} = \frac{\text{normale periode}}{a}$$

$$720^\circ = \frac{360^\circ}{a}$$

$$a = \frac{360^\circ}{720^\circ} = \frac{1}{2}$$

3.  $f(x) - 1$  beteken dat die grafiek 1 eenheid afwaarts beweeg.

Die terrein van  $f$  is  $y \in [-1; 1]$  vir  $y \in \mathbb{R}$

$\therefore$  Die terrein van  $k(x) = f(x) - 1$

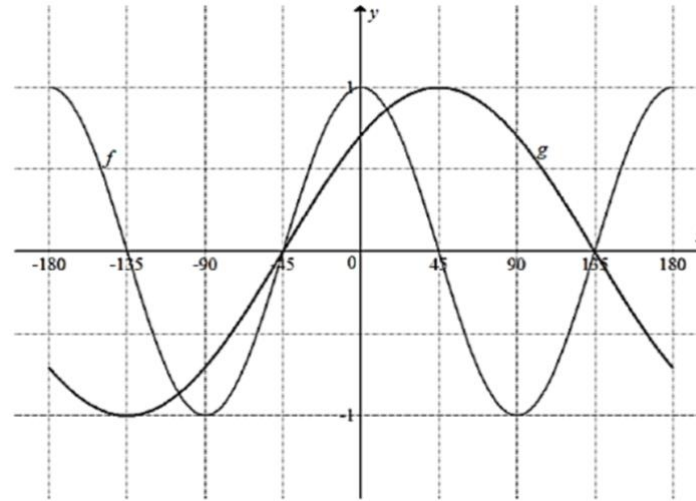
Die terrein van  $k(x)$ :  $y \in [-2; 0]$



**KAN JY?**

In die meegaande diagram s die grafieke van  $f(x) = a \cos bx$  en  $g(x) = \sin(x + p)$  vir  $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$

1. Skryf die waardes van  $a$ ,  $b$  en  $p$ .
2. Vir watter waarde(s) van  $x$  in die gegewe interval neem die grafiek van  $f$  toe soos die grafiek van  $g$  toeneem?
3. Skryf die periode van  $f(x)$  neer.
4. Bepaal die minimum waarde van  $h$  as  $h(x) = f(x) - 1$ .
5. Beskryf hoe die grafiek van  $f$  moet transformeer om die grafiek  $k(x) = \sin x$  te vorm.



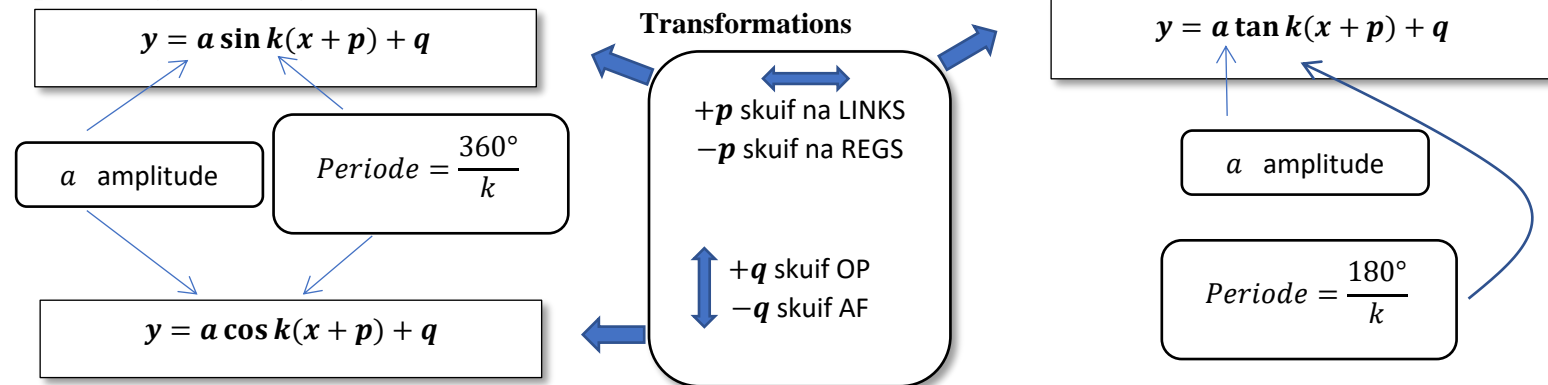
**Oplossings:**

1.  $a = 1; b = 2; p = -45^\circ$
2.  $x \in [-90^\circ; 0^\circ]$
3.  $180^\circ$
4.  $-2$  [ grafiek skuif 1 eenheid afwaarts ]
5. Move  $45^\circ$  na regs

AKTIWITEITE/ ASSESSERING	Mind Action Reeks	Platinum	Clever	Everything Maths (Siyavula)
	Oef 2&3: BI 192-194	Oef 4&5: BI 124 Oef 11: BI 135	Oef 6.2-6.6: BI 189-205	Oef 5.21-5.27 : BI 202- 221 Oef 5.29-5.31: BI 227-232

**KONSOLIDASIE**

**Opsomming van belangrike feite:**



**Begin altyd met die basiese funksies!!**