



VAK en GRAAD	Wiskunde Gr 11	
KWARTAAL 3	Week 5	
ONDERWERP	Trigonometrie: Formule om driehoeke op te los	
DOEL VAN DIE LESSE	Om leerders bekend te stel aan formules om die grootte van hoeke en die lengte van sye van enige driehoek te bepaal.	
BRONNE	<i>Papier bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>
	<i>Gaan asseblief deur die afdeling oor Trigonometrie: sinus en kosinu-reël Oplos van driehoeke n jou Handboek.</i>	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=r4YJuhS-1XE">https://www.youtube.com/watch?v=r4YJuhS-1XE</a>
INLEIDING	<ul style="list-style-type: none"> <li>In Gr 10 was jy bekendgestel aan Trigonometrie waar ons trigonometriese verhoudings (<math>\sin \theta</math>, <math>\cos \theta</math> en <math>\tan \theta</math>) en die stelling van Pythagoras gebruik het om die hoeke en sye van 'n <b>reghoekige driehoek</b> te bereken. Andersins het ons 'n <b>reghoekige driehoek</b> in die Cartesiese vlak geteken om die hoeke en sye te bereken deur trigonometrie en Pythagoras te gebruik.</li> <li>In die volgende lesse vir Gr 11 gaan ons jou bekendstel aan 3 reëls/ formules (Sin-reël, Cos-reël en Oppervlakte-reël) wat jou instaat sal stel om die sye en hoeke sowel as die oppervlakte van <b>enige driehoek</b> te bereken, ongeag van dit reghoekig is of nie.</li> <li>Hierdie reëls is baie belangrik vir verdere studie in Trigonometrie en daar word van jou verwag om die BEWYSE TE KEN vir eksamendoeleindes. Dit vorm deel van die 12 punte wat in Vraestel 2 aan Boekwerk toegeken word.</li> </ul>	
KONSEPTE EN VAARDIGHEDE	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gebruik van Stelling van Pythagoras</li> <li>Oplos van reghoekige driehoeke</li> <li>Teken Loodregte hoogtes van driehoeke.</li> <li>Gebruik trig verhoudings: <math>\sin \theta</math>, <math>\cos \theta</math> en <math>\tan \theta</math></li> <li>Gebruik die wetenskaplike sakrekenaar om trigonometriese berekeninge te doen</li> </ul>	

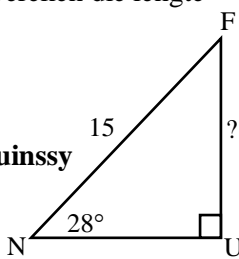
**Les 1: Hersien Gr 10 Trigonometrie: Oplos van Driehoeke**

1. In  $\triangle FUN$ ,  $FN = 15$ ,  $\angle U = 90^\circ$  en  $\angle N = 28^\circ$ . Bereken die lengte van UF

**Oplossing:**

Sy UF is **Teenoorstaande** aan  $28^\circ$  en FN is die **Skuinssy**

Skryf die Verhouding met UF as noemer



$$\frac{UF}{15} = \frac{t}{s} = \sin 28^\circ$$

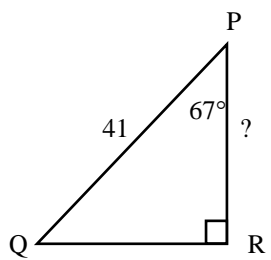
$$\therefore UF = 15 \sin 28^\circ = 7,04$$

1
5
sin
2
8
)
=

*Nota: Ons kan die Stelling van Pythagoras of  $\cos 28^\circ$  gebruik om die ander sy te bereken.*

**KAN JY?**

1. In  $\triangle PQR$ ,  $PQ = 41$ ,  $\angle R = 90^\circ$  en  $\angle P = 67^\circ$ . Bereken die lengte van PR.



**Oplossing: PR = 16,02**



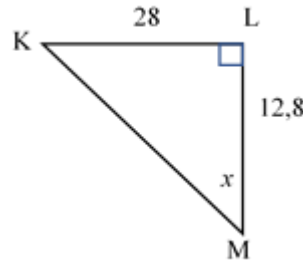
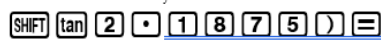
2. Bereken die grootte van hoek  $x$  in die diagram

28 is **teenoor**  $x$  en 12,8 is **aangrensend** aan  $x$

Kies **tan  $x$**  omdat **teenoorst** en **aangr** sye gegee word

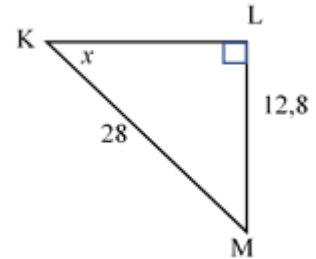
$$\Rightarrow \tan x = \frac{t}{a} = \frac{28}{12,8} = 2,1875$$

$$\therefore x = \tan^{-1}(2,1875) = 65,43^\circ$$



**KAN JY?**

2. Bereken die grootte van hoek  $x$  in die diagram

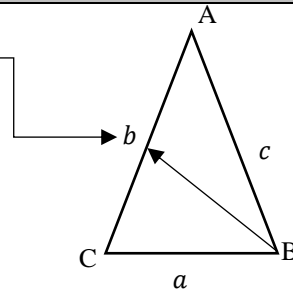


**Oplossing:**  $x = 27,20^\circ$

**Les 2: Die sinus (sin) reël**

**Nota:**

- Ons gebruik kleinletters om die sy **teenoor** 'n hoek(punt) te benoem
- In 'n  $\Delta$  kry ons die **kortste** sy teenoor die **kleinste hoek** en omgekeerd
- Daar kan slegs **1 stomphoek** in 'n  $\Delta$  wees (teenoor die langste sy)

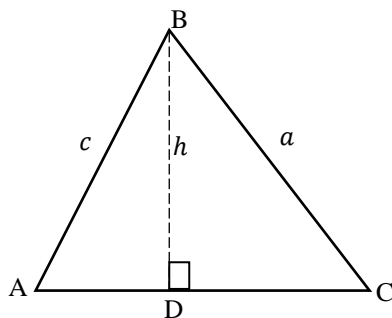


**Sin-reël:** In enige  $\Delta ABC$  het ons dat:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  OF  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

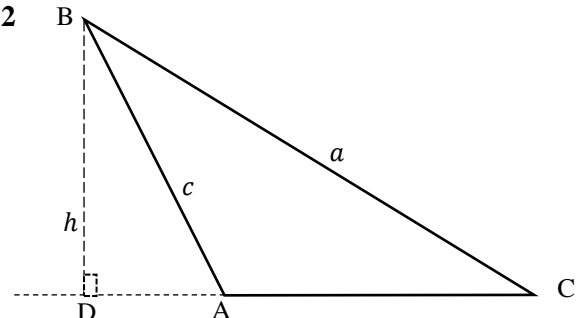
**Bewys :** Gegee enige  $\Delta ABC$ . Bewys dat  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  [Ons sal dit doen vir wanneer  $\hat{A}$  skerp is en vir  $\hat{A}$  stomp]  
(Nota: Bewys mag verskillend wees in jou handboek)

**Konstruksie:** Trek  $\Delta ABC$  met  $h$  die loodregte hoogte vanaf B op AC (fig. 1) of op AC verleng (fig. 2)

**Fig.1**



**Fig. 2**



$$\sin A = \frac{h}{c} \quad [\text{in } \Delta ABD] \quad \text{en} \quad \sin C = \frac{h}{a} \quad [\text{in } \Delta CBD] \quad [\because \sin \theta = \frac{\text{teenoorst. sy}}{\text{skuinssy}}]$$

$$\therefore h = c \sin A \quad \text{en} \quad h = a \sin C$$
$$\therefore c \sin A = a \sin C \Rightarrow \therefore \frac{c \sin A}{ac} = \frac{a \sin C}{ac}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

Netso, deur konstruksie van 'n  $\perp$  hoogte vanaf C op AB, kan ons bewys dat:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Die sin-reël word gewoonlik gebruik wanneer **2 sye en 'n hoek**, teenoor 1 van die 2 sye, gegee word of wanneer **2 hoeke en 'n sy** gegee word soos ons in die volgende 2 voorbeelde sal toon.

**Voorbeelde: Toepassing van die sin-reël**

1. In  $\triangle ABC$  het ons  $AC = 17$ ,  $BC = 19$  en  $\hat{B}AC = 60^\circ$   
Bereken die grootte van  $\hat{B}$

**Oplossing:**

[2 sye en 'n hoek teenoor 1 van die sye word gegee]

Skryf die sin-reël met  $\sin B$  as noemer

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

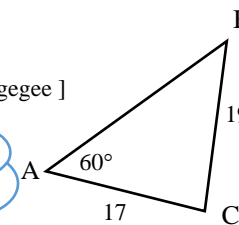
$$\therefore \frac{\sin B}{17} = \frac{\sin 60^\circ}{19}$$

$BC = a$  en  $AC = b$

$$\therefore \sin B = \frac{17 \sin 60^\circ}{19} = 0,7748..$$

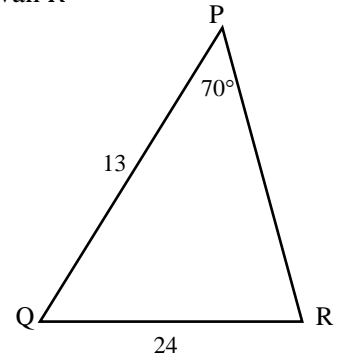
$$\therefore \hat{B} = 50,79^\circ$$

$\hat{B}$  moet kleiner as  $60^\circ$  wees. Hoekom?



**Kan jy doen?**

1. In  $\triangle PQR$  het ons  $PQ = 13$ ,  $QR = 24$  en  $\hat{P} = 70^\circ$   
Bereken die grootte van  $\hat{R}$



Antwoord:  $\hat{R} = 30,6^\circ$

2. Bereken die lengte van  $YZ$  in die volgende diagram:

Oplossing: [2 hoeke en 'n sy word gegee]

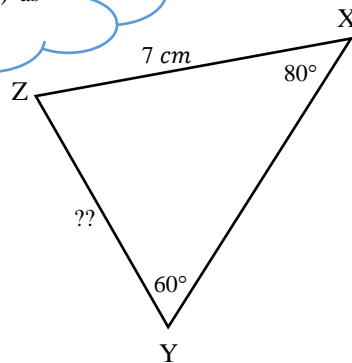
Skryf die sin-reël met sy  $YZ (x)$  as noemer

$$\therefore \frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y}$$

$$\therefore \frac{x}{\sin 80^\circ} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore x = \frac{7 \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ}$$

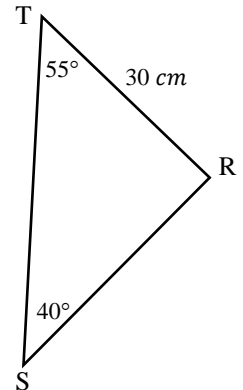
$$= 7,96 \text{ cm}$$



**Nota:**  $\hat{Z}$  kan bereken word deur die som van binnehoeke van 'n  $\triangle$  en dan die sy  $XY$  weer deur gebruik van die sin-reël

**Kan jy doen?**

2. Bereken die lengte van  $RS$  in die volgende diagram:



Antwoord:  $RS = 38,23 \text{ cm}$

**Nota:** As ons 'n reghoekige  $\triangle$  het, lei die gebruik van die sin-reël tot die sin- verhouding

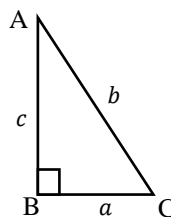
Vanaf die diagram:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 90^\circ}{b}$$

$\sin 90^\circ = 1$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin 90^\circ}{b} = \frac{a(1)}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\text{teenoorst}}{\text{skuins}}$$





**Les 3: sin-reël (verv.)**

**Die dubbelsinnige geval:** [2 sye en 'n hoek gegee]

Soos genoem, kry ons die kleinste hoek teenoor die kortste sy, en gevolglik die grootste hoek teenoor die langste sy van 'n  $\Delta$ .

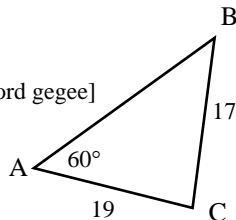
As ons dus gevra word om die grootte van 'n hoek te bereken teenoor die langste van die gegewe 2 sye, kan ons 2 waardes (1 skerp en die ander stomp) vir daardie hoek kry, tensy anders vermeld.

Ons sal hierdie illustreer deur voorbeeld 1 aan te pas:

3. In  $\Delta ABC$  het ons  $AC = 19$ ,  $BC = 17$  en  $\hat{BAC} = 60^\circ$   
Bereken die grootte van  $\hat{B}$

**Oplossing:**

[2 sye en 'n hoek teenoor 1 van die sye word gegee]



$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\therefore \frac{\sin B}{19} = \frac{\sin 60^\circ}{17}$$

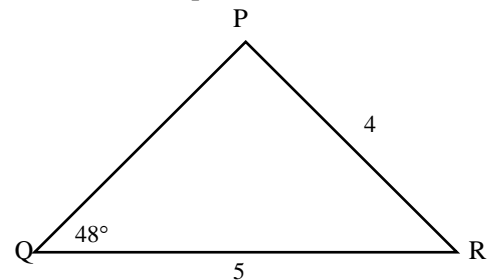
$$\therefore \sin B = \frac{19 \sin 60^\circ}{17} = 0,967910\dots$$

$$\therefore \hat{B} = 75,45^\circ \text{ OF } \hat{B} = 180^\circ - 75,45^\circ = 104,55^\circ$$

Omdat  $AC = 19$  langer is as  $BC$ , kan ons 2 waardes vir  $\hat{B}$  kry ( $> 60^\circ$ )

**Kan jy doen?**

3. Bereken die grootte van  $\hat{P}$  if  $QR = 5$ ,  $PR = 4$ ,  $\hat{Q} = 48^\circ$  en  $\hat{P}$  is stomp.



Antwoord:  $\hat{P} = 111,73^\circ$

Doen Oefeninge oor die sin-reël uit jou Handboek

**Les 4: Die cos-reël**

As 3 sye gegee word, **kan ons nie** die sin-reël gebruik nie, omdat ten minste 1 hoek benodig word.

Dieselfde sal gebeur as 2 sye en die **ingeslote hoek** gegee word, omdat 1 van die hoeke teenoor 1 van die gegewe sye moet wees.

Om dit te oorkom, stel ons die cos-reël bekend:

Hoek tussen die 2 sye

**Cos-reël:** In enige  $\triangle ABC$  het ons dat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{OF}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{OF}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

OF

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

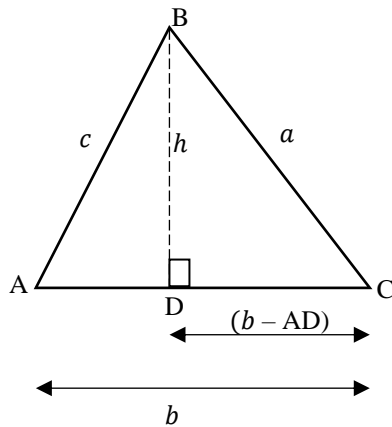
Om sye te bereken

Om hoeke te bereken

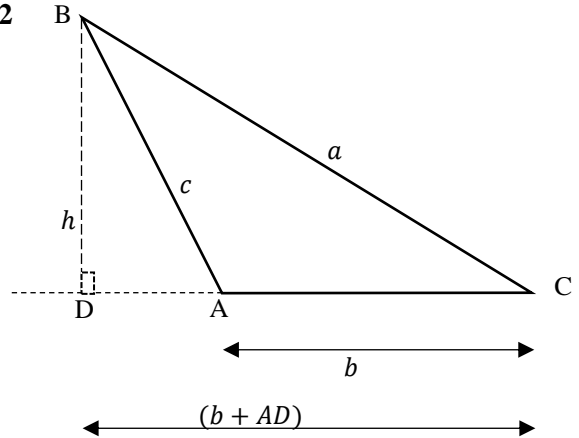
**Bewys :** Gegee enige  $\triangle ABC$ . Bewys dat  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  [Ons sal dit doen vir wanneer  $\hat{A}$  skerp en stomp is] (Nota: Bewys mag verskillend wees in jou handboek)

**Konstruksie:** Trek  $\triangle ABC$  met  $h$  die loodregte hoogte vanaf B op AC (fig. 1) of AC verleng (fig. 2)

**Fig.1**



**Fig. 2**



In  $\triangle BDC$ :  $a^2 = DC^2 + h^2$  Pyth

$$= (b - AD)^2 + h^2$$

$$= b^2 - 2b \cdot AD + AD^2 + h^2$$

$$= b^2 - 2b \cdot AD + c^2 \dots [AD^2 + h^2 = c^2] \text{ Pyth}$$

Maar in  $\triangle ABD$ :  $\frac{AD}{c} = \sin A \Rightarrow AD = c \sin A$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

In  $\triangle BDC$ :  $a^2 = DC^2 + h^2$  Pyth

$$= (b + AD)^2 + h^2$$

$$= b^2 + 2b \cdot AD + AD^2 + h^2$$

$$= b^2 + 2b \cdot AD + c^2 \dots [AD^2 + h^2 = c^2] \text{ Pyth}$$

Maar in  $\triangle ABD$ :  $\frac{AD}{c} = \sin(180^\circ - A) = -\sin A$   
 $\Rightarrow AD = -c \sin A$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



**Les 5: Toepassing van die cos-reël**

**Nota:** Die cos-reël word gebruik wanneer:

- 3 sye gegee word (en jy moet 'n hoek bereken)
- 2 sye en die **ingeslote hoek** gegee word (en jy moet die 3<sup>de</sup> sy bereken)

**Voorbeeld 1.**

In  $\triangle DEF$  het ons  $d = 4$ ;  $f = 7$  en  $\hat{E} = 65^\circ$ . Bereken die lengte van  $DF(e)$

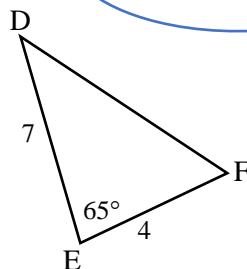
**Oplossing:** [2 sye en ingeslote hoek gegee]

$$e^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos E$$

$$\therefore e^2 = (4)^2 + (7)^2 - 2(4)(7) \cos 65^\circ$$

$$\therefore e^2 = 41,33$$

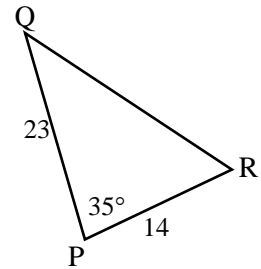
$$\therefore DF = \sqrt{41,33} = 6,43$$



Cos-reël vir  $\triangle DEF$   
om sy  $e$  te bereken

**Kan jy doen?**

In  $\triangle QPR$  het ons  $q = 14$ ;  $r = 23$  en  $\hat{P} = 35^\circ$ . Bereken die lengte van  $QR$



**Antwoord:**  $QR = 14,05$

**Voorbeeld 2.**

In  $\triangle KLM$ ,  $k = 6$ ;  $l = 9$  en  $m = 12$ .

- (a) Bereken die grootte van  $\hat{K}$   
(b) Bereken die grootte van  $\hat{M}$

**Oplossing:**

(a) [3 sye word gegee]

$$k^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos K$$

$$\therefore \cos K = \frac{l^2 + m^2 - k^2}{2lm}$$

$$\therefore \cos K = \frac{(9)^2 + (12)^2 - (6)^2}{2(9)(12)} = 0,875$$

$$\therefore \hat{K} = 28,96^\circ$$

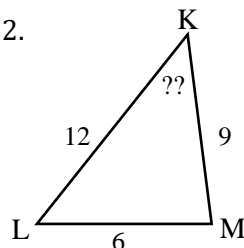
(b) Omdat 'n hoek + (tenminste) 2 sye met 'n sy teenoor die hoek gegee word, gebruik ons die **sin-reël** verder!!

$$\therefore \frac{\sin M}{m} = \frac{\sin K}{k}$$

$$\therefore \frac{\sin M}{12} = \frac{\sin 28,96^\circ}{6}$$

$$\therefore \sin M = \frac{12 \sin 28,96^\circ}{6} = 0,968 \dots$$

$$\therefore \hat{M} = 75,53^\circ$$

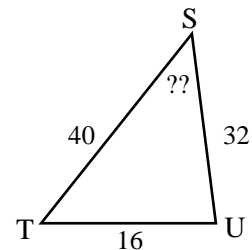


Cos-reël vir  $\triangle KLM$  om hoek  $K$  te bereken

**Kan jy doen?**

In  $\triangle STU$ ,  $s = 16$ ;  $t = 32$  en  $u = 40$ .

- (c) Bereken die grootte van  $\hat{S}$   
(d) Bereken die grootte van  $\hat{T}$



**Antwoord:**

(a)  $\hat{S} = 22,33^\circ$

(b)  $\hat{T} = 49,45^\circ$



**Voorbeeld 3.**

Bereken die grootte van  $\hat{F}$  deur die diagram te gebruik:

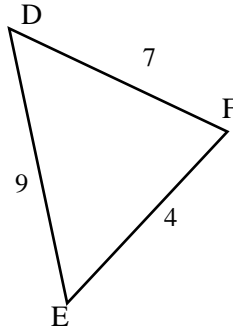
**Oplossing:** [3 sye gegee: gebruik cos-reël]

$$\begin{aligned} \therefore \cos F &= \frac{d^2 + e^2 - f^2}{2de} \\ &= \frac{(4)^2 + (7)^2 - (9)^2}{2(4)(7)} \\ &= -0,285 \dots \end{aligned}$$

Verw.  $\angle$ :  $0,285 \cos^{-1} = 73,44^\circ$

$\therefore \hat{F} = 180^\circ - 73,44^\circ$

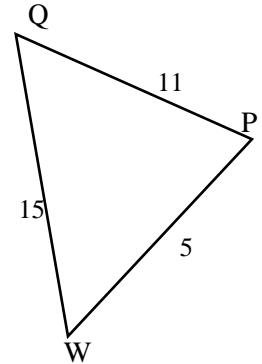
**= 106, 56°**



(-) waarde dui aan dat  $\hat{F}$  'n **stomphoek** is, daarom trek ons die verwysings $\angle$  af vanaf  $180^\circ$

**Kan jy doen?**

Bereken die grootte van  $\hat{P}$  deur die diagram te gebruik:



**Antwoord:**  $\hat{P} = 126, 76^\circ$

**AKTIWITIETE/  
ASSESSERING**

Doen asseblief die Oefeninge soos hulle verskyn aan die einde van die sin- en cos-reël in jou Handboek.

**KONSOLIDASIE:**

- Sin-reël:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  OF  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
- ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en 'n hoek**, teenoor 1 van die 2 sye, gegee word of wanneer **2 hoeke en 'n sy** gegee word.
- Cos-reël:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  om 'n sy te bereken OF  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  om 'n hoek te bereken.
- ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en die ingeslote hoek**, of wanneer **3 sye** gegee word.
- Die cos-reël word slegs eenkeer in 'n driehoek gebruik en daarna word die sin-reël gebruik om die ander hoeke/ sye te bereken.
- In die volgende les sal ons kyk na die Oppervlakte-reël wat ons instaat sal stel om die oppervlakte van enige driehoek te bereken.
- Dankie dat jy deelgeneem het aan hierdie les en hou aan om deur die lesse te werk soos dit beskikbaar gemaak word.
- Onthou: Jou harde werk sal aan die einde beloon word met sukses!!

VASBYT!!



**Wes-Kaapse  
Regering**

Onderwys

Direktoraat: VOO Kurrikulum