



VAK en GRAAD	Wiskunde Gr 11	
KWARTAAL 3	Week 6	
ONDERWERP	Trigonometrie: Formule om driehoeke op te los: Oppervlakte reël	
DOEL VAN DIE LESSE	Om leerders bekend te stel aan formules om die grootte van hoeke en die lengte van sye van enige driehoek te bepaal.	
BRONNE	<i>Papier bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>
	<i>Gaan asseblief deur die afdeling oor Trigonometrie: Oplos van driehoeke in jou Handboek en dan na Oppervlakreël</i>	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=P6H8KIWOFEA">https://www.youtube.com/watch?v=P6H8KIWOFEA</a>
INLEIDING	<ul style="list-style-type: none"> <li>In die vorige les het ons na die sin- en cos-reël gekyk om die onbekende sye en van hoeke van enige driehoek te bereken.</li> <li>In hierdie les gaan ons na die Oppervlakte reël kyknwat ons in staat stel om die oppervlakte van enige driehoek te bereken.</li> <li>Hierdie reël is baie belangrik vir verdere studie in Trigonometrie en daar word van jou verwag om die BEWYS TE KEN vir eksamendoeleindes. Dit vorm deel van die 12 punte wat in Vraestel 2 aan Boekwerk toegeken word.</li> </ul>	
KONSEPTE EN VAARDIGHEDE	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gebruik van Stelling van Pythagoras</li> <li>Oplos van reghoekige driehoeke</li> <li>Teken Loodregte hoogtes van driehoeke.</li> <li>Gebruik trig verhoudings: <math>\sin \theta</math>, <math>\cos \theta</math> en <math>\tan \theta</math></li> <li>Gebruik die wetenskaplike sakrekenaar om trigonometriese berekeninge te doen</li> </ul>	

**Les 1: Hersien: Oppervlakte van driehoek**

1. Bereken die oppervlakte van  $\triangle DEF$  as  $EF = 6 \text{ cm}$ ,  $\angle F = 90^\circ$  en  $DF = 9 \text{ cm}$

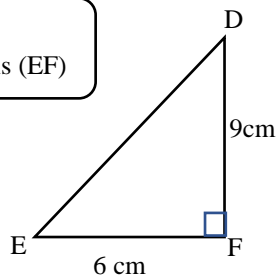
**Oplossing:**

Oppervlakte  $\triangle DEF = \frac{1}{2} \text{ basis} \times \perp \text{ hoogte}$

$$= \frac{1}{2} (EF)(DF) = \frac{1}{2} (6)(9)$$

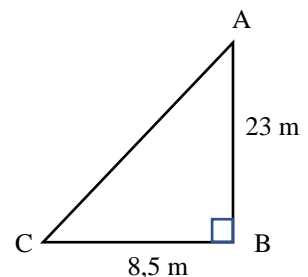
$$= 27 \text{ cm}^2$$

$\perp$  hoogte (DE) is loodreg op die basis (EF)



**KAN JY?**

1. Bereken die oppervlakte van  $\triangle ABC$  as  $AB = 23 \text{ m}$ ,  $BC = 8,5 \text{ m}$  en  $\angle B = 90^\circ$



**Oplossing:** Oppervlakte  $\triangle ABC = 97,75 \text{ m}^2$

Hier is dit duidelik dat ons die  $\perp$  hoogte (reghoekige driehoek) nodig om die oppervlakte te bereken. Wat as daar GEEN  $\perp$  hoogte is nie, dus geen reghoekige driehoek? [Ja, ons kan een intrek, maar wat sal sy lengte dan wees?]

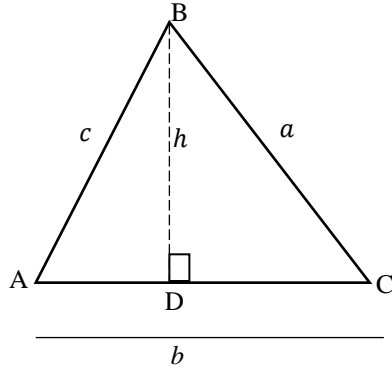
Dis hoekom ons die Oppervlakte reël bekend stel

**Die Oppervlakte reël:** In  $\triangle ABC$ , het ons: Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$  OF  $\frac{1}{2} ac \sin B$  OF  $\frac{1}{2} bc \sin A$

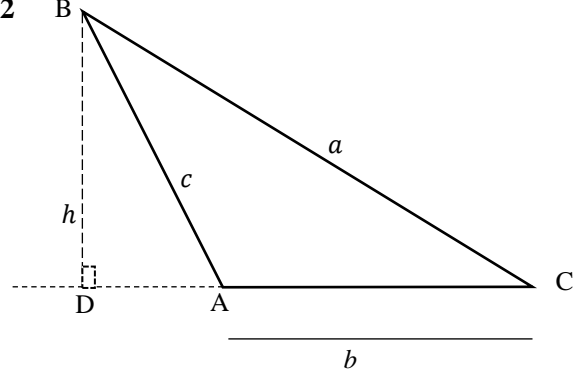
**Bewys :** Gegee: Enige  $\triangle ABC$ . Bewys dat Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$  OF  $\frac{1}{2} ac \sin B$  OF  $\frac{1}{2} bc \sin A$  [Ons sal dit doen vir wanneer  $\hat{A}$  skerp is en wanneer  $\hat{A}$  stomp is]  
(Nota: Bewys mag verskil van dit in jou handboek)

**Konstruksie:** Trek  $\triangle ABC$  met  $h$  die loodregte hoogte vanaf B op AC (fig. 1) of AC verleng (fig. 2)

**Fig.1**



**Fig. 2**



Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2}$  basis  $\times$   $\perp$  hoogte

$$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} b \times BD$$

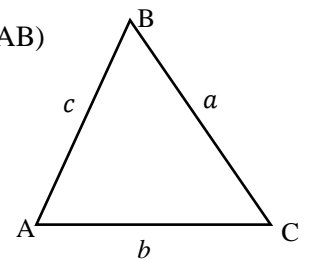
**Maar:** In  $\triangle ABD$   $\frac{BD}{c} = \sin A \Rightarrow BD = c \sin A$  OF In  $\triangle BCD$   $\frac{BD}{a} = \sin C \Rightarrow BD = a \sin C$

$$\therefore \text{Oppervlakte van } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{OF} \quad \text{Oppervlakte van } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Netso, deur konstruksie van 'n  $\perp$  hoogte vanaf C op AB, kan ons bewys: Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$

**Nota:**

- In die Oppervlakte reël: Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$ , is die sye  $b$  (AC) en  $c$  (AB) aangrensend tot die hoek A; ons sê  $\hat{A}$  is die **ingeslote hoek** tussen die 2 sye
- So, om die oppervlakte te bereken, benodig ons 2 **sy**e en die **ingeslote hoek**
- Oppervlakte word gemeet in (**eenhede**)<sup>2</sup>



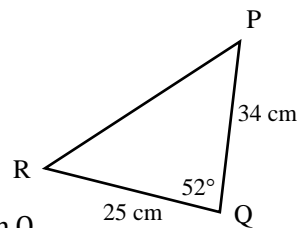
**Les 2/3: Toepassing van die Oppervlakte-reël**

**Voorbeelde:**

1. Bereken die Oppervlakte van  $\triangle PQR$  as  $PQ = 34$  cm,  $QR = 25$  cm en  $\hat{Q} = 52^\circ$

**Oplossing:**

[2 sye en ingeslote hoek gegee]



$$\text{Oppervlakte van } \triangle PQR = \frac{1}{2} pr \sin Q$$

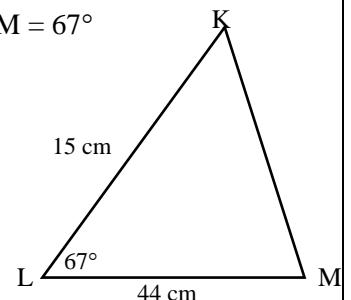
$$= \frac{1}{2} (25)(34) \sin 52^\circ$$

PQ = r en QR = p

$$= 334,9 \text{ cm}^2$$

**Kan jy?**

1. Bereken die Oppervlakte van  $\triangle KLM$  as  $KL = 15$  cm,  $LM = 44$  cm en  $\hat{L} = 67^\circ$



**Oplossing:** Oppervlakte  $\triangle KLM = 303,77 \text{ cm}^2$



2. Bereken die Oppervlakte van  $\Delta ABC$  as  $a = 7$  m,  $b = 11$  cm en  $\hat{B} = 98^\circ$

Oplossing: [2 sye en nie 'n ingeslote hoek gegee]

Om die ingeslote hoek  $C$  te bereken, moet ons eers die sin-reël gebruik om  $\hat{A}$  te bereken (omdat 1 van die gegewe sye teenoor  $\hat{A}$  is)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{7} = \frac{\sin 98^\circ}{11}$$

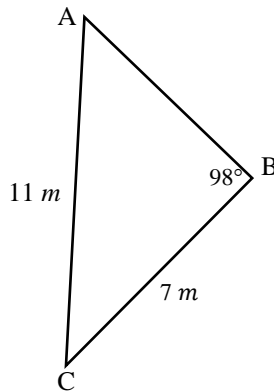
$$\therefore \sin A = \frac{7 \sin 98^\circ}{11}$$

$$= 0,63017\dots$$

$$\therefore \hat{A} = 39,06^\circ$$

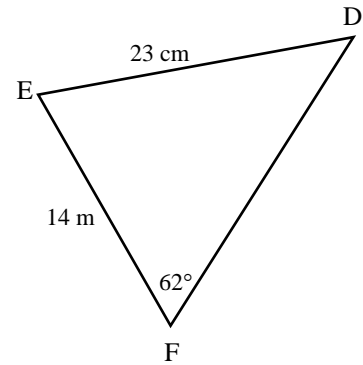
$$\text{Dus: } \hat{C} = 180^\circ - 39,06^\circ - 98^\circ = 42,94^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Nou: Oppervlakte van } \Delta ABC &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} (7)(11) \sin 42,94^\circ \\ &= 26,23 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



**Kan jy?**

2. Bereken die Oppervlakte van  $\Delta DEF$  as  $d = 14$  cm,  $f = 23$  cm en  $\hat{F} = 62^\circ$



Oplossing: Oppervlakte van  $\Delta DEF = 160,5 \text{ cm}^2$  [ $\hat{E} = 85,49^\circ$ ]

**Nota:** As ons die Oppervlakte reël op 'n reghoekige  $\Delta$  toepas, lei dit slegs tot die normale Oppervlakte formule

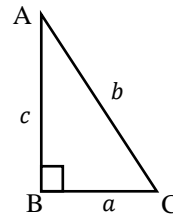
Vanaf die diagram:

$$\text{Oppervlakte van } \Delta ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin 90^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$= \frac{1}{2} ac (1) = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \text{ basis} \times \perp \text{ hoogte}$$



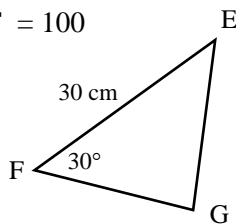
3. Die oppervlakte van  $\Delta FGH = 100 \text{ cm}^2$ ,  $\hat{F} = 30^\circ$  en  $g = 30$  cm. Bepaal die lengte van  $h$

**Oplossing:**

$$\text{Oppervlakte van } \Delta FGH = \frac{1}{2} gh \sin F = 100$$

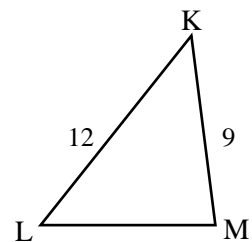
$$\therefore \frac{1}{2} (30)h \sin 30^\circ = 100$$

$$\therefore h = \frac{100}{15 \sin 30^\circ} = 13,3 \text{ cm}$$



**Kan jy?**

3. Die oppervlakte van  $\Delta KLM = 78,98 \text{ cm}^2$ ,  $KL = 12$  cm en  $KM = 9$  cm. Bereken die lengte van  $\hat{K}$



Oplossing:  $\hat{K} = 46^\circ$



**Les 4: Gemengde probleme oor sin/cos/oppervlakte reël**

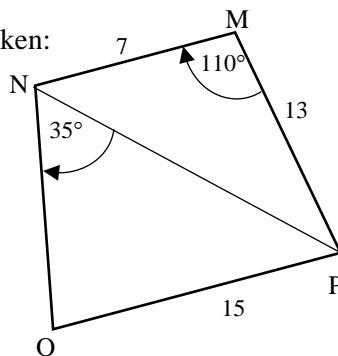
Nota:

- Sin-reël:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  OF  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en 'n hoek**, *teenoor* 1 van die 2 sye, gegee word of wanneer **2 hoeke en 'n sy** gegee word.
- Cos-reël:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  om 'n sy te bereken OF
 
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
 om 'n hoek te bereken.
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en die ingeslote hoek**, of wanneer 3 sye gegee word.
- Oppervlakte reël: Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$  OF  $\frac{1}{2}ac \sin B$  OF  $\frac{1}{2}bc \sin A$ 
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en die ingeslote hoek** gegee word.
- Gewoonlik word cos-reël slegs eenkeer in 'n driehoek gebruik, daarna word die sin-reël gebruik.
- Oppervlakte reël word gebruik slegs wanneer oppervlakte gegee of gevra word

**Voorbeeld 1.**

Gebruik die diagram en bereken:

- Oppervlakte van  $\triangle MNP$
- Lengte van NP
- $\hat{N}OP$



Oplossings:

(a) Oppervlakte van  $\triangle MNP = \frac{1}{2}np \sin M$

$$= \frac{1}{2}(13)(7) \sin 110^\circ = 42,76 \text{ (eenhede)}_2$$

(b) In  $\triangle MNP$ :  $m^2 = n^2 + p^2 - 2np \cos M$

$$\therefore NP^2 = (13)^2 + (7)^2 - 2(13)(7) \cos 110^\circ$$

$$\therefore NP^2 = 280,247\dots$$

$$\therefore NP = 16,74 \text{ eenhede}$$

(c) In  $\triangle NOP$ :  $\frac{\sin O}{o} = \frac{\sin N}{n}$

$$\therefore \frac{\sin O}{16,74} = \frac{\sin 35^\circ}{15} \Rightarrow \sin O = \frac{16,74 \sin 35^\circ}{15}$$

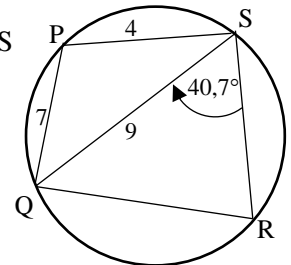
$$= 0,64$$

$$\therefore \hat{O} = 39,8^\circ$$

**Kan jy?**

Verwys na die diagram en bereken:

- $\hat{P}$  (stomp)
- Oppervlakte van  $\triangle PQS$
- $\hat{R}$ , met redes
- SR



2 sye en ingeslote hoek gegee

Oplossing: QR = 14,05

2 sye en 'n hoek teenoor 1 van die sye gegee



AKTIWITIETE/  
ASSESSERING

*Doen asseblief die Oefeninge soos hulle verskyn aan die einde van die oppervlakte-reël in jou Handboek.*

KONSOLIDASIE:

- Sin-reël:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  OF  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en 'n hoek**, teenoor 1 van die 2 sye, gegee word van wanneer **2 hoeke en 'n sy** gegee word.
- Cos-reël:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  om 'n sy te bereken OF
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
 om 'n hoek te bereken.
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en die ingeslote hoek**, of wanneer **3 sye** gegee word.
- Oppervlakte reël: Oppervlakte van  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$  OF  $\frac{1}{2} ac \sin B$  OF  $\frac{1}{2} bc \sin A$ 
  - ✓ Word gebruik wanneer **2 sye en die ingeslote hoek** gegee word.
- Oppervlakte reël word gebruik slegs wanneer oppervlakte gegee of gevra word.
- Die cos-reël word slegs eenkeer in 'n driehoek gebruik en daarna word die sin-reël gebruik om die ander hoeke/ sye te bereken.
- In die volgende les sal ons kyk na die toepassing van die reëls op Probleme in 2D.
- Dankie dat jy deelgeneem het aan hierdie les en hou aan om deur die lesse te werk soos dit beskikbaar gemaak word.
- Onthou: Jou harde werk sal aan die einde beloon word met sukses!!

VASBYT!!