



VAK en GRAAD	Wiskunde Gr 11	
KWARTAAL 3	Week 7	
ONDERWERP	Trigonometrie: Formule om driehoeke op te los	
DOEL VAN DIE LESSE	Om formules te gebruik om die grootte van hoeke en die lengte van sye van driehoeke te bepaal wat verband hou met Probleme in 2D.	
BRONNE	<i>Papier bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>
	<i>Gaan asseblief deur die afdeling oor Trigonometrie: Oplos van driehoeke in jou Handboek en dan na Oplos van Probleme in 2D</i>	
INLEIDING	<ul style="list-style-type: none"> In die vorige les het ons na die Oppervlaktereël en gemengde voorbeelde gekyk om die onbekende sye en /van hoeke, sowel as die oppervlakte van enige driehoek te bereken. In hierdie les gaan ons kyk na die oplossing van probleme in 2 Dimensies waar ons die reëls toepas. 	
KONSEPTE EN VAARDIGHEDE	<ul style="list-style-type: none"> Gebruik van Stelling van Pythagoras Oplos van reghoekige driehoeke Gebruik die Oppervlakte/ sin/ cos- reëls Gebruik trig verhoudings: $\sin \theta$, $\cos \theta$ en $\tan \theta$ Gebruik die wetenskaplike sakrekenaar om trigonometriese berekeninge te doen 	

Les 1: Toepassing van reëls op Probleme in 2D

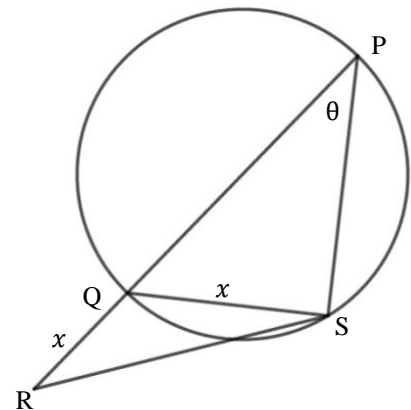
1. In die diagram is PQ die middellyn van die sirkel met middelpunt O. PQR is 'n reguitlyn en $QR = QS = x$.

(a) Bewys dat $RS^2 = 2x^2(1 + \sin \theta)$

(b) As $RS = \sqrt{12}$ en $x = 2$

(i) Toon, sonder gebruik van 'n sakrekenaar, dat $\theta = 30^\circ$ en $PQ = 4$

(ii) Bereken die Oppervlakte van ΔRQS



Oplossing:

(a) In ΔPQS : $\widehat{QSP} = 90^\circ \dots \angle$ in halwe sirkel

$$\therefore \widehat{RQS} = 90^\circ + \theta \dots \text{buite } \angle \text{ van } \Delta$$

Nou: In ΔRQS : $RS^2 = QS^2 + QR^2 - 2.QS.QR.\cos(90^\circ + \theta)$

$$= x^2 + x^2 - 2.x.x.(-\sin \theta)$$

$$= 2x^2 + 2x^2 \sin \theta$$

$$= 2x^2(1 + \sin \theta)$$

Cos reël vir ΔRQS

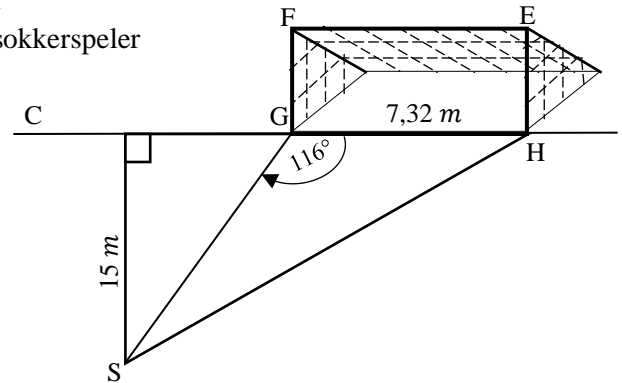
(b) (i) $RS^2 = 2x^2(1 + \sin \theta)$ $\therefore (\sqrt{12})^2 = 2(2)^2(1 + \sin \theta)$ $\therefore 12 = 8(1 + \sin \theta)$ $\therefore 1,5 = 1 + \sin \theta$	$\therefore \sin \theta = 0,5$ $\therefore \theta = 30^\circ$	(i) $\sin \theta = \frac{QS}{PQ}$ $\therefore 0,5 = \frac{2}{PQ}$ $\therefore PQ = 4$	(ii) Oppervlakte $\Delta RQS = \frac{1}{2}RQ.QS \sin(90^\circ + \theta)$ $= \frac{1}{2}(2)(2) \sin(90^\circ + 30^\circ)$ $= \sqrt{3} \text{ (eenhede)}^2$
--	--	---	---



Kan jy doen?

2. 'n Sokkerspeler mik na die doelhok wat 15 meter vanaf die agterlyn CH op 'n sokkerveld is. Die hoek vanaf die linker doelpaal, FG na die sokkerspeler, S is 116° . Die doelpale is 7,32 m wyd. Die diagram stel die genoemde situasie voor. Bereken:

- 2.1 Die grootte van \widehat{CGS}
- 2.2 Hoe ver die sokkerspeler is vanaf die linker doelpaal, FG (bereken die afstand GS)
- 2.3 Hoe ver die sokker speler is vanaf die regter doelpaal, EH
- 2.4 Die benaderde grootte van \widehat{GSH} , die hoek waarbinne die sokkerspeler moontlik 'n doel kan aanteken.

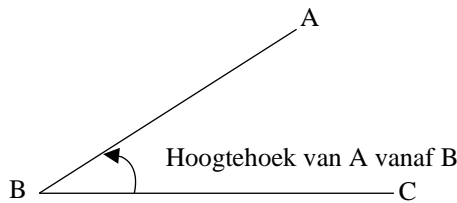


Oplossings:

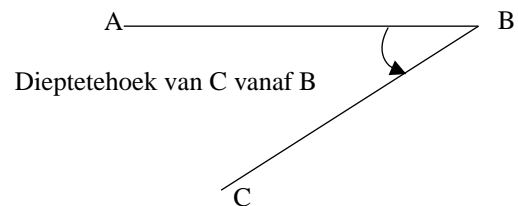
- 2.1 $\widehat{CGS} = 64^\circ$
- 2.2 $GS = 16,9\text{ m}$
- 2.3 $SH = 20,96\text{ m}$
- 2.4 $\widehat{GSH} = 18,29^\circ$

Les 2: Hoogtehoeke/ Dieptehoeke

Hoogtehoek (vanaf horisontaal opwaarts)

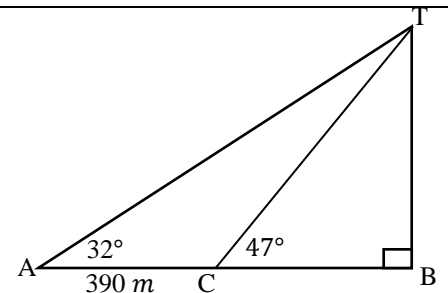


Dieptehoek (vanaf horisontaal afwaarts)



Voorbeeld:

1. Die diagram toon 'n vertikale toring TB. 'n Persoon staan by 'n punt A, in dieselfde horisontale vlak as die basis van die toring en neem waar dat die hoogtehoek na T, die top van die toring 32° is. 'n Ander persoon staan by punt C, 390 m vanaf die persoon by A, en neem waar dat die hoogtehoek na T 47° is. ACB is in 'n reguitlyn. Bereken:



- 1.1 die grootte van \widehat{ATC}
- 1.2 die afstand vanaf die top van die toring na die man C, dit wil sê, TC
- 1.3 die hoogte van die toring, TB

Oplossing:

- 1.1 $\widehat{ATC} = 15^\circ$... buite \angle van Δ
- 1.2 In ΔATC : [2 hoeke + 1 sy teenoor 'n hoek gegee] \Rightarrow gebruik sin-reël

$$\frac{TC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin \widehat{ATC}} \therefore \frac{TC}{\sin 32^\circ} = \frac{390}{\sin 15^\circ}$$

$$\therefore TC = \frac{390 \sin 32^\circ}{\sin 15^\circ} = 798,51\text{ m}$$

1.3 ΔTBC is reghoekig

\Rightarrow gebruik trig verhoudings

$$\frac{TB}{CT} = \sin \widehat{TCB}$$

$$\therefore \frac{TB}{789,51} = \sin 47^\circ$$

$$\therefore TB = 789,51 \sin 47^\circ = 583,99\text{ m}$$



Nota: Berekeninge/ Bewyse wanneer met probleme in 2D gewerk word

- Gewoonlik word twee driehoeke met 'n gemeenskaplike/ verbindingsy gegee – gewoonlik is die een reghoekig en die ander nie-reghoekig - identifiseer dit.
- In die reghoekige driehoek gebruik ons die drie trigverhoudings ($\sin \theta$; $\cos \theta$; $\tan \theta$) om sye / hoeke te bereken of om sye in terme van 'n ander te skryf.
- In die nie-reghoekige driehoek gebruik ons die sin / cos-reël om sye / hoeke te bereken.
- Let ook daarop dat Euklidiese Meetkunde soms nodig mag wees om die grootte van die hoeke te bereken.
- Begin met die driehoek met die meeste gegewe inligting en bereken die gemene sy, afhangende van die tipe driehoek, andersins begin by die gevraagde.
- Hierdie gemene sy bied gewoonlik 'n skakel na die opvolgvraag / vereiste antwoord.
- Gebruik slegs die Oppervlaktereël as u gevra word om Oppervlakte te bereken.

Voorbeeld:

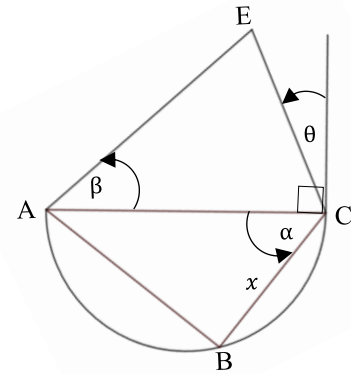
In die diagram is AC die middellyn van die halwe sirkel. Die hoogtehoek van E vanaf A is β en die dieptehoek van B vanaf C is α . $DC \perp AC$ met $\widehat{ECD} = \theta$ en $BC = x$

1.1. Wat is die grootte van \widehat{ABC} ?

1.2. Toon aan dat $AC = \frac{x}{\cos \alpha}$

1.3. Bepaal 'n uitdrukking vir \widehat{AEC} in terme van θ en β

1.4. Bewys vervolgens dat $EC = \frac{x \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos(\beta - \theta)}$



Oplossing:

1.1. $\widehat{ABC} = 90^\circ \dots \angle$ in halwe sirkel

Gebruik trig verhoudings in ΔABC omdat dit reghoekig is

1.2. $\frac{x}{AC} = \cos \alpha$

$\Rightarrow AC = \frac{x}{\cos \alpha}$

AC is die gemeenskaplike sy!! Sal later weer gebruik word

1.3. $\widehat{ECA} = 90^\circ - \theta$

$\therefore \widehat{AEC} = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \theta) \dots \Sigma$ binne \angle e van ΔAEC

$= 90^\circ - \beta + \theta = 90^\circ - (\beta - \theta)$

Omdat ons $(\beta - \theta)$ sien in 1.4

1.4. $\frac{EC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin[90^\circ - (\beta - \theta)]}$

Gebruik sin-reël in ΔAEC

$\therefore \frac{EC}{\sin \beta} = \frac{\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right)}{\sin[90^\circ - (\beta - \theta)]}$

Vervang die waarde van AC vanaf 1.2

$= \frac{x}{\cos \alpha \cdot \cos(\beta - \theta)}$

$\sin[90^\circ - (\beta - \theta)] = \sin(\beta - \theta)$

$\therefore EC = \frac{x \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos(\beta - \theta)}$



Kan jy doen?

2. ABCD is 'n trapesium in die diagram met $AD \parallel BC$. $AD \perp AB$ en $\widehat{BCD} = 150^\circ$. CD word verleng na E en BE en AE is getrek. Die hoogthoek van E vanaf A is x en die hoogthoek van E vanaf B is y . Stel $AB = h$

2.1 Bepaal, met redes, die grootte van \widehat{AEB} .

2.2 Toon aan dat $BE = \frac{h \cos x}{\sin(y-x)}$

2.3 Bewys vervolgens dat $CE = \frac{2h \cos x \sin y}{\sin(y-x)}$

2.4 As $h = 5 \text{ m}$, $x = 55^\circ$ en $y = 70^\circ$, bereken die lengte van CE.

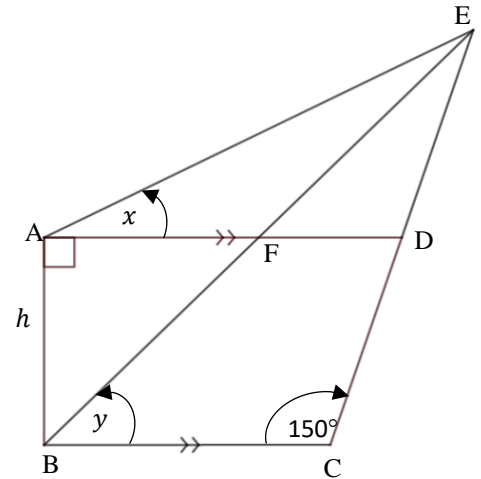
Oplossing:

2.1 $\widehat{AEB} = y - x$

2.2 gebruik sin-reël in $\triangle ABE$

2.3 gebruik sin-reël in $\triangle EBC$

2.4 $CE = 20,82 \text{ m}$



AKTIWITEITE/ ASSESSERING

*Doen asseblief die Oefeninge soos dit verskyn in jou Handboek oor
Probleme in 2D*

KONSOLIDASIE:

- Gewoonlik word twee driehoeke met 'n gemeenskaplike/ verbindingsy gegee – gewoonlik is die een reghoekig en die ander nie-reghoekig - identifiseer dit.
- In die reghoekige driehoek gebruik ons die drie trigverhoudings ($\sin \theta$; $\cos \theta$; $\tan \theta$) om sye / hoeke te bereken of om sye in terme van 'n ander te skryf.
- In die nie-reghoekige driehoek gebruik ons die sin / cos-reël om sye / hoeke te bereken.
- Let ook daarop dat Euklidiese Meetkunde soms nodig mag wees om die grootte van die hoeke te bereken.
- Begin met die driehoek met die meeste gegewe inligting en bereken die gemene sy, afhangende van die tipe driehoek, andersins begin by die gevraagde.
- Hierdie gemene sy bied gewoonlik 'n skakel na die opvolgvraag / vereiste antwoord.
- Gebruik slegs die Oppervlaktereël as u gevra word om Oppervlakte te bereken.
- Dankie dat jy aan hierdie les deelgeneem het en gaan voort om die lesse deur te werk soos dit beskikbaar gestel word.
- Onthou: Jou harde werk sal aan die einde met sukses beloon word !!

HOU AAN HARD WERK !!