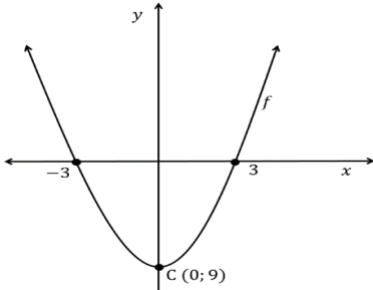
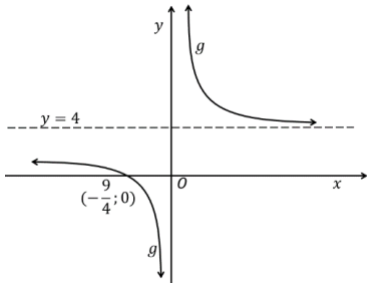
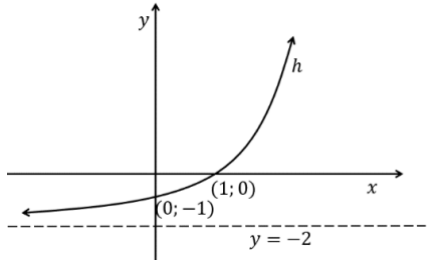

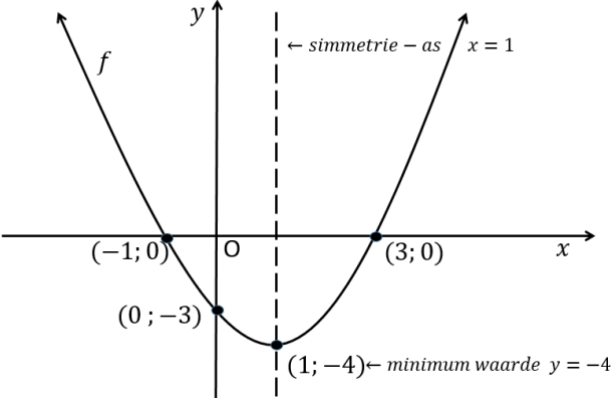
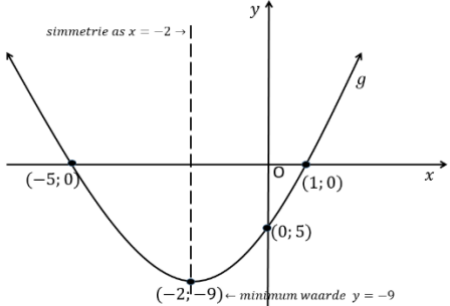


VAK EN GRAAD	WISKUNDE GR 11		
KWARTAAL 3	Week 2		
ONDERWERP	FUNKSIES		
DOEL VAN DIE LES	<ul style="list-style-type: none"> • Skets van die grafieke van 'n paraboliese, hiperboliese en eksponensiële funksie. • Die bekendstelling van die Parabool-vergelykings in draaipuntvorm en standaardvorm. • Gebruik van die konsepte: vorm, draaipunt, simmetrie-asse, afsnitte en asimptote soos dit met die grafieke verband hou. 		
BRONNE	<i>Papiergebaseerde bronne</i>	<i>Digitale bronne</i>	
	Gaan na die hoofstuk oor Funksies in jou Wiskunde handbook.	Parabool: https://bit.ly/2KMLuwW ; https://bit.ly/2ycgLTF ; https://bit.ly/3eWbFk Hiperbool: https://bit.ly/3aQokg4 ; https://bit.ly/3aOhEiz ; https://bit.ly/3bSa8Va Eksponensiële grafiek: https://bit.ly/2KLNbxq	
INLEIDING	<p>In graad 10 het jy geleer om die volgende grafieke te skets:</p> <p>$y = ax^2 + q$, $y = \frac{a}{x} + q$ en $y = a \cdot b^x + q$</p> <p>Hier volg 'n paar voorbeelde van grafieke wat in GR10 geskets is.</p>		
			
• Standaard vorm	$y = ax^2 + q$	$y = \frac{a}{x} + q$	$y = a \cdot b^x + q$
• Vergelyking vir skets	$f(x) = x^2 - 9$	$g(x) = \frac{9}{x} + 4$	$h(x) = 2^x - 2$
• x -afsnitte ($y = 0$)	$(-3; 0)$ en $(3; 0)$	$(-\frac{9}{4}; 0)$	$(1; 0)$
• y -afsnit ($x = 0$)	$(0; 9)$	geen	$(0; -1)$
• Asimptote		horisontale asimptoot $y = 4$ vertikale asimptoot $x = 0$	horisontale asimptoot $y = -2$
• Ander	$a > 0 \rightarrow$ arms op 	$k > 0 \rightarrow$ grafiek in die 1ste en 3de kwadrant	$b > 1 \rightarrow$ stygende grafiek

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE (1) PARABOOL	In hierdie les gaan ons dieselfde grafieke skets, maar ons sal 'n ekstra parameter p byvoeg. $y = a(x + p)^2 + q$, $y = \frac{k}{x+p} + q$ and $y = a \cdot b^{x+p} + q$ Ons sal ontdek dat hierdie veranderlike die grafieke links of regs sal transleer (skuif).
HOE OM DIE GRAFIEK TE SKETS: $y = a(x + p)^2 + q$ <ul style="list-style-type: none"> • Daar is DRIE konsepte waarvoor die eksaminator punte sal toeken: • Draaipunt • x –afsnitte • y – afsnit 	NOTA: $f(x)$ –notasie: Om tussen verskillende grafieke te onderskei, benoem ons dit met letters van die alfabet. Om hierdie rede gebruik ons $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ens. in die plek van die y –waarde.
VOORBEELD 1 1.1 Skets $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ Toon alle afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunt duidelik aan.	KAN JY? 1) Skets $g(x) = (x + 2)^2 - 9$ Toon duidelik alle afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunt. 2) Het hierdie grafiek 'n minimum of maksimum waarde? Gee die waarde. 3) Gee die vergelyking van die simmetrie-as.
ANTWOORD: <ul style="list-style-type: none"> • $a > 0 \rightarrow$ arms op • DP (1; -4) • x –afsnitte ($y = 0$) $0 = (x - 1)^2 - 4$ $0 = x^2 - 2x + 1 - 4$ $0 = x^2 - 2x - 3$ $0 = (x - 3)(x + 1)$ $\therefore x = 3 ; x = -1$ • y – afsnit ($x = 0$) $y = (0 - 1)^2 - 4$ $y = -3$  1.2 Het hierdie grafiek 'n minimum of maksimum waarde? Gee die waarde. ANTWOORD: Minimum waarde van y is -4	ANTWOORD: 1) <ul style="list-style-type: none"> • x –afsnitte ($y = 0$) $0 = (x + 2)^2 - 9$ $0 = x^2 + 4x + 4 - 9$ $0 = x^2 + 4x - 5$ $0 = (x + 5)(x - 1)$ $x = -5 ; x = 1$  2) minimum waarde van y is -9 3) $x = -2$

Dit is altyd 'n goeie idee om die simmetrie-as met 'n gebroke lyn aan te dui



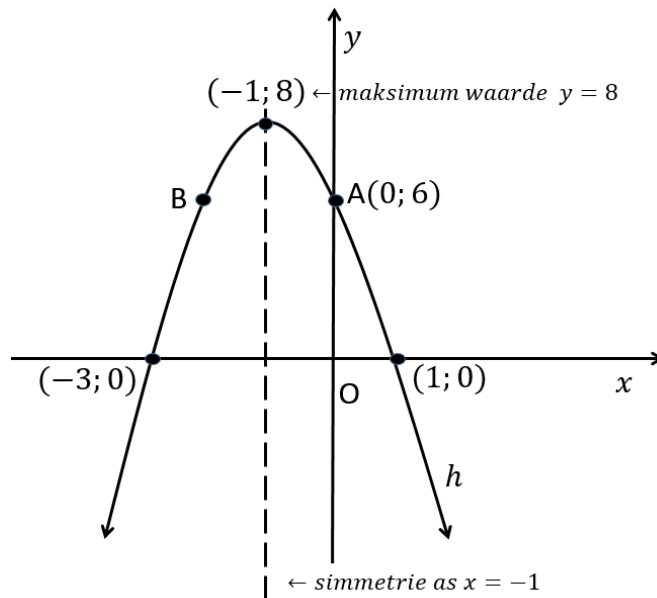
VOORBEELD 2

2.1 Skets $h(x) = -2(x + 1)^2 + 8$

Toon alle afsnitte met die asse en die koördinate van draaipunt duidelik aan.

ANTWOORD:

- $a < 0 \rightarrow$ arms af
- **DP $(-1; 8)$**
- **x - afsnitte ($y = 0$)**
 $0 = -2(x + 1)^2 + 8$
 $0 = -2(x^2 + 2x + 1) + 8$
 $0 = -2x^2 - 4x - 2 + 8$
 $0 = -2x^2 - 4x + 6$
 $0 = -2(x^2 + 2x - 3)$
 $0 = -2(x + 3)(x - 1)$
 $\therefore x = -3 ; x = 1$
- **y - afsnit ($x = 0$)**
 $y = -2(0 + 1)^2 + 8$
 $y = 6$



2.2 Gee die koördinate van B as B die refleksies is van A(0; 6) in die simmetrie-as.

ANTWOORD :

B(-2; 6)

NOTA:

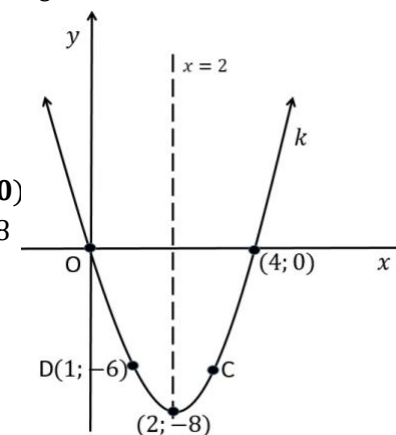
Die -2 sal NIE die koördinate van die draaipunt beïnvloed nie.

KAN JY?

- 4) Skets $k(x) = 2(x - 2)^2 - 8$
- 5) Toon alle afsnitte met die asse en die draaipunt duidelik aan.
- 6) Gee die koördinate van C, as C die refleksie is van D(1; -6) in die simmetrie-as.

ANTWOORD:

- 4)
 - $a > 0 \rightarrow$ arms op
 - **DP $(2; -8)$**
 - **x - afsnitte ($y = 0$)**
 $0 = 2(x - 2)^2 - 8$
 $0 = 2(x^2 - 4x + 4) - 8$
 $0 = 2x^2 - 8x + 8 - 8$
 $0 = 2x^2 - 8x$
 $0 = 2x(x - 4)$
 $\therefore x = 0 ; x = 4$
 - **y - afsnit ($x = 0$)**
 $y = 2(0 - 2)^2 - 8$
 $y = 0$



5) C(3; -6)



NOTA:
Hierdie vergelyking is in
standaardvorm.

Ons kan nie die draaipunt
in hierdie vorm "sien"
nie.

Ons moet die volgende
formule gebruik om die
simmetrie-as te bereken:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

VOORBEELD 3

3.1 Skets $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

Toon alle afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunt duidelik aan.

ANTWOORD:

- $a < 0 \rightarrow$ arms af
- DP

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4)}{2(-2)}$$

$$x = -1$$

Vervang hierdie waarde in die **OORSPRONKLIKE VERGELYKING** om die y -koördinaat te bereken.

$$f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6$$

$$f(-1) = 8$$

Draaipunt $(-1; 8)$

- **x -afsnitte ($y = 0$)**

$$0 = -2x^2 - 4x + 6$$

$$0 = -2(x^2 + 2x - 3)$$

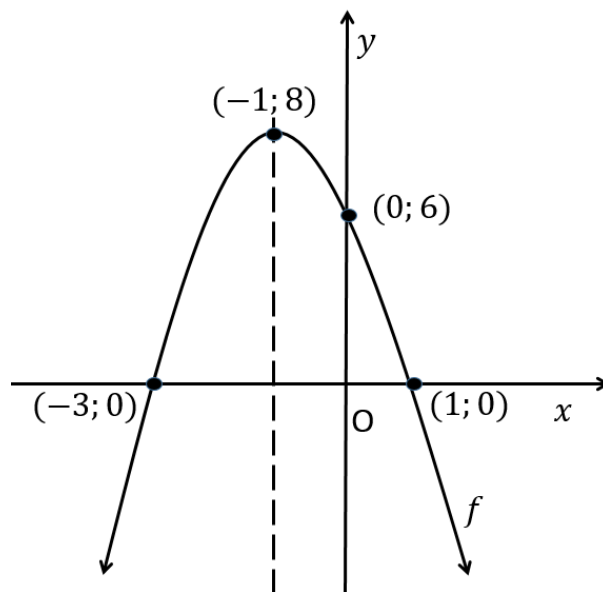
$$0 = -2(x + 3)(x - 1)$$

$$\therefore x = -3 ; x = 1$$

- **y -afsnit ($x = 0$)**

$$y = -2(0)^2 - 4(0) + 6$$

$$y = 6$$



KAN JY?

6) Skets $g(x) = x^2 - 8x + 16$

Toon alle afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunt duidelik aan.

ANTWOORD:

- $a > 0 \rightarrow$ arms op

- DP

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)}$$

$$x = 4$$

$$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 16$$

$$f(4) = 0$$

DP $(4; 0)$

- **x -afsnitte ($y = 0$)**

$$0 = x^2 - 8x + 16$$

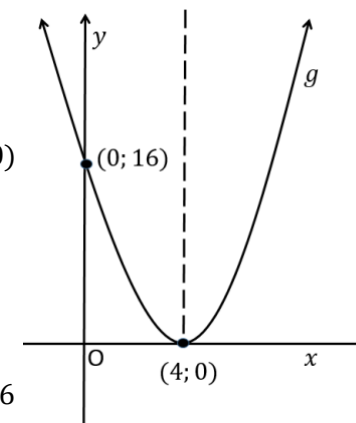
$$0 = (x - 4)(x - 4)$$

$$\therefore x = 4 ; x = 4$$

- **y -afsnit ($x = 0$)**

$$y = (0)^2 - 8(0) + 16$$

$$y = 16$$





KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

(2) HIPERBOOL

HOE OM DIE GRAFIEK TE SKETS: $y = \frac{a}{x+p} + q$

Daar is **DRIE** konsepte waarvoor die eksaminator punte sal toeken:

- Horisontale en vertikale asimptote.
- x – afsnit
- y – afsnit

VOORBEELD 4

4.1) Skets die grafiek $h(x) = \frac{8}{x+1} - 4$. Toon alle afsnitte met die asse en die asimptote duidelik aan.

ANTWOORD:

- Horisontale asimptoot: $y = -4$ en vertikale asimptoot: $x = -1$

- x – afsnit ($y = 0$)

$$0 = \frac{8}{x+1} - 4$$

$$4 = \frac{8}{x+1}$$

$$4(x+1) = 8$$

$$4x + 4 = 8$$

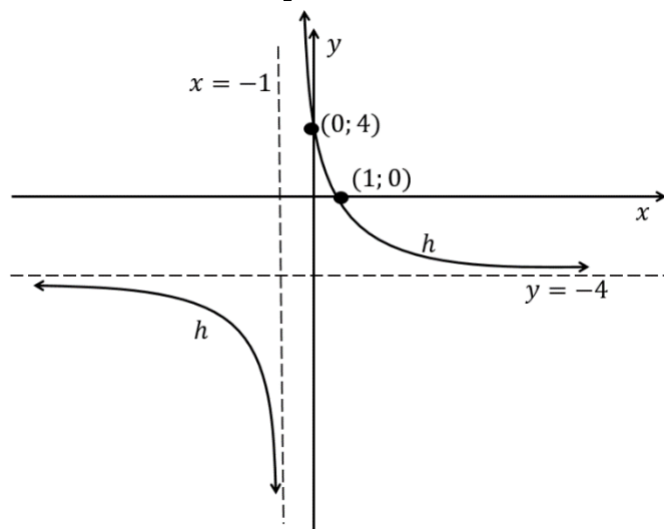
$$4x = 4$$

$$x = 1$$

- y – afsnit

$$y = \frac{8}{0+1} - 4$$

$$y = 4$$



KAN JY?

7) Skets die grafiek $p(x) = \frac{-4}{x-1} - 2$

Toon alle afsnitte met die asse en die asimptote duidelik aan.

ANTWOORD:

- Horisontale asimptoot: $y = -2$

- vertikale asimptoot: $x = 1$

- x – afsnit ($y = 0$)

$$0 = \frac{-4}{x-1} - 2$$

$$2 = \frac{-4}{x-1}$$

$$2(x-1) = -4$$

$$2x - 2 = -4$$

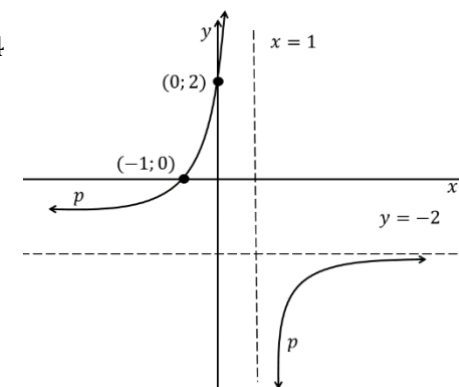
$$2x = -2$$

$$x = -1$$

- y – afsnit

$$y = \frac{-4}{0-1} - 2$$

$$y = 2$$





KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

(2) EKSPONENSIËLE GRAFIEK

HOE OM DIE GRAFIEK TE SKETS: $y = a \cdot b^{x+p} + q$

Daar is **DRIE** konsepte waarvoor die eksaminator punte sal toeken:

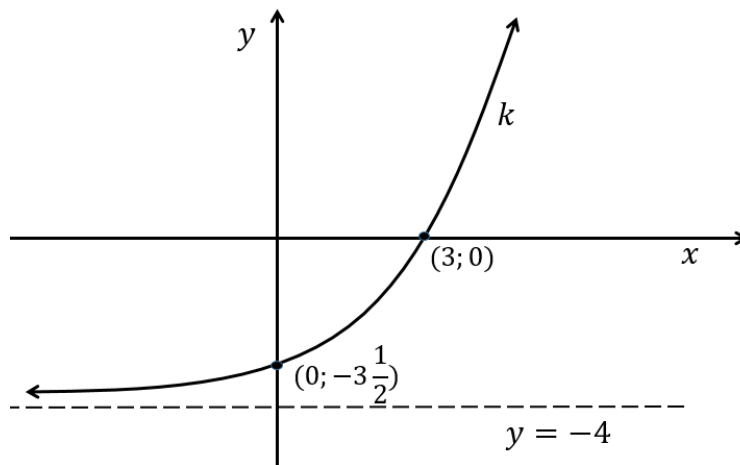
- Horisontale asimptoot.
- x – afsnit
- y – afsnit

VOORBEELD 5

5.1) Skets die grafiek $k(x) = 2^{x-1} - 4$. Toon alle afsnitte met die asse en die asimptoot duidelik aan.

ANTWOORD:

- Horisontale asimptoot: $y = -4$
- x – afsnit ($y = 0$)
 $0 = 2^{x-1} - 4$
 $4 = 2^{x-1}$
 $2^2 = 2^{x-1}$
 $2 = x - 1$
 $3 = x$
- y – afsnit
 $y = 2^{0-1} - 4$
 $y = \frac{1}{2} - 4$
 $y = -3\frac{1}{2}$



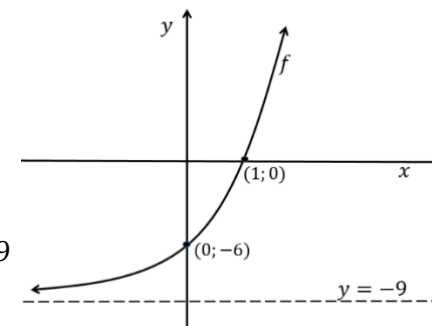
KAN JY?

8) Skets die grafiek $f(x) = 3^{x+1} - 9$

Toon alle afsnitte met die asse en die asimptoot duidelik aan.

ANTWOORD:

- Horisontale asimptoot: $y = -9$
- x – afsnit ($y = 0$)
 $0 = 3^{x+1} - 9$
 $9 = 3^{x+1}$
 $3^2 = 3^{x+1}$
 $2 = x + 1$
 $1 = x$
- y – afsnit
 $y = 3^{0+1} - 9$
 $y = 3 - 9$
 $y = -6$



9) Gee die vergelyking van g waar g die grafiek is nadat f 6 eenhede op en 1 eenheid links geskuif het.

ANTWOORD:

$g(x) = 3^{x+2} - 3$



HOE OM DIE GRAFIEK TE SKETS: $y = a \cdot b^{x+p} + q$

VOORBEELD 6

6.1) Skets die grafiek $k(x) = \frac{1^{x-2}}{2} - 8$ toon alle afsnitte met die asse en die asimptoot duidelik aan.

ANTWOORD:

- **Horisontale asimptoot:** $y = -8$

- **x - afsnit ($y = 0$)**

$$0 = \frac{1^{x-2}}{2} - 8$$

$$8 = (2^{-1})^{x-2}$$

$$2^3 = 2^{-x+2}$$

$$3 = -x + 2$$

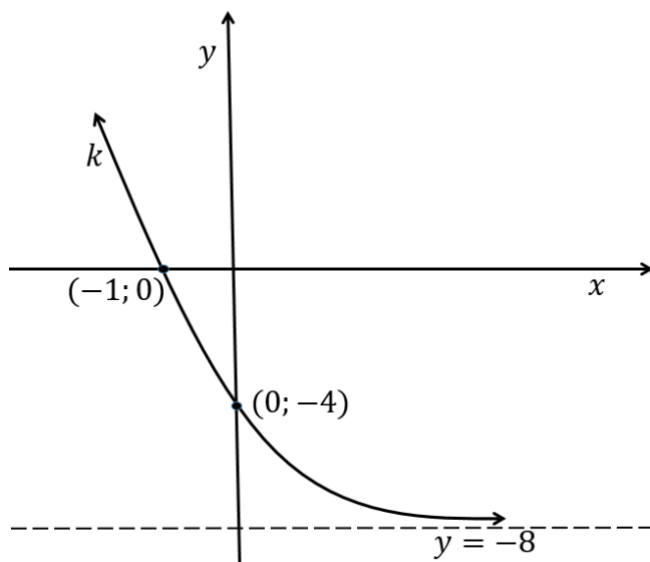
$$x = -1$$

- **y - afsnit**

$$y = \frac{1^{0-2}}{2} - 8$$

$$y = 4 - 8$$

$$y = -4$$



KAN JY?

10) Skets die grafiek $g(x) = \frac{1^{x+1}}{5} - 1$

Toon alle afsnitte met die asse en die asimptoot duidelik aan.

ANTWOORD:

- **Horisontale asimptoot:** $y = -1$

- **x - afsnit ($y = 0$)**

$$0 = \frac{1^{x+1}}{5} - 1$$

$$1 = \frac{1^{x+1}}{5}$$

$$5^0 = (5^{-1})^{x+1}$$

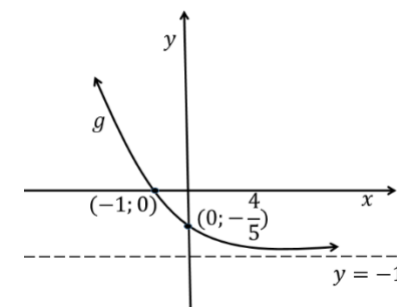
$$0 = -x - 1$$

$$x = -1$$

- **y - afsnit**

$$y = \frac{1^{0+1}}{5} - 1$$

$$y = -\frac{4}{5}$$



11) Gee die vergelyking vir h waar h die grafiek is nadat f 1 eenheid op en 1 eenheid regs geskuif het.

ANTWOORD :

$$h(x) = \frac{1^x}{5}$$

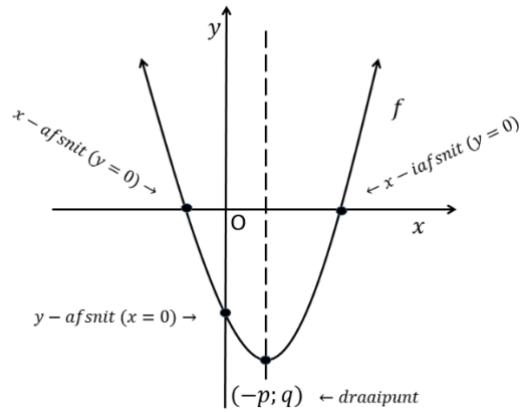
AKTIWITEITE / ASSESSERING

- VIA AFRICA p 52 – 56 Vraag 1 – 9
- MIND ACTION SERIES Oefening 1 – 6 p 87 – 114
- SIYAVULA Oefening 5 – 4 p154 ; Oefening 5 – 5 p155 en Oefening 5 – 6 p161
- PLATINUM Oefening 3 bl 86 ; Oefening 4 bl 89 en Oefening 7 bl 97



OPSOMMING

PARABOOL $y = a(x + p)^2 + q$

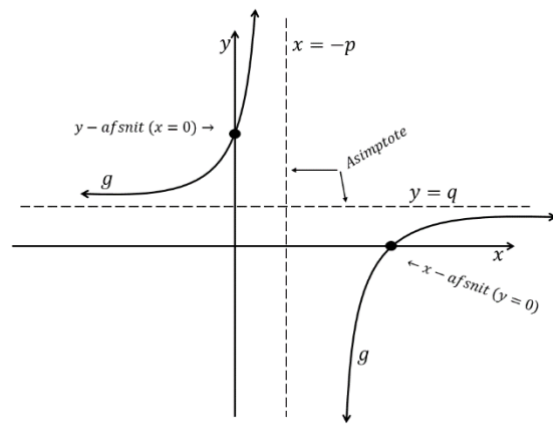


- x -afsnit(te) ($y = 0$) & y -afsnit ($x = 0$)
- Draaipunt $(-p; q)$

	$p > 0$		$p < 0$	
	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$				
$q < 0$				

www.everythingmaths.co.za

HIPERBOOL $y = \frac{a}{x+p} + q$



- x -afsnit(te) ($y = 0$) & y -afsnit ($x = 0$)
- Asimptote $x = -p$ en $y = q$

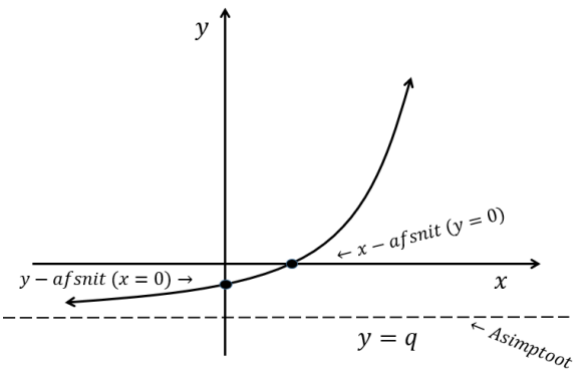
	$p > 0$		$p < 0$	
	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$				
$q < 0$				

www.everythingmaths.co.za



ESPONENSIËLE GRAFIEK:

$y = a \cdot b^{x+p} + q$



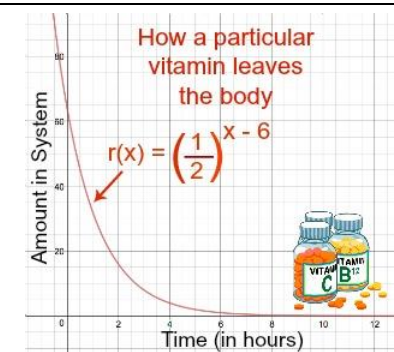
- x-afsnit ($y = 0$)
- y-afsnit ($x = 0$)
- Asimptoot $y = q$

$b > 1$	$a < 0$	$a > 0$	$0 < b < 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$			$q > 0$		
$q < 0$			$q < 0$		

www.everythingmaths.co.za

WAARDES:

Konsepte / vaardighede in scenario's in die werklike lewe.



<http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics/>

<https://study.com/academy/lesson/modeling-the-real-world-with-families-of-functions.html>