AK EN GRAAD	Wiskunde Graad 12	
KWARTAAL 2	Week 4	
ONDERWERP	Differentiaalrekene	
DOELSTELLING VAN LES	• Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen twee punte van 'n funksie. • Definieer die term afgeleide. • Bepaal die afgeleide vanuit eerste beginsels. Pas differensiasiereëls toe om die afgeleide te bepaal. • Bepaal die vergelyking van die raaklyn met gegewe inligting.	
BRONNE	***Papiergebaseerde hulpbronne***	***Digitale hulpbronne***
	Gaan asseblief na die Differentiaalrekene *module in jou Wiskunde Handboek.* Mind Gap: bl 123, Siyavula: bl 204	https://www.youtube.com/watch?v=kyErKnDwDXM https://www.youtube.com/watch?v=vzDYOHETFlo https://www.youtube.com/watch?v=WHnRyzXXT1U

INLEIDING:

Liewe leerder in vorige grade het jy geleer oor die **Gradiënt** tussen twee punte op die reguit lyn. Jy het die formule, $\boldsymbol{gradient} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, gebruik om die gradiënt tussen twee punte te bepaal. Die gemiddelde gradiënt tussen twee punte is soortgelyk aan die gradiënt van die lyn tussen al die punte.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Gemiddelde gradiënt

Oorweeg 'n funksie wat nie 'n reguitlyn is soos die funksie, $f(x) = x^2 - 2x - 2$ dan is die gradiënt by al die punte nie dieselfde nie. As ons die gradiënt tussen enige twee punte van 'n funksie wil bepaal verwys ons na die gemiddelde gradiënt.

$\boldsymbol{Gem.\ gradiënt\ van\ die\ kurwe} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Die punte kan ook geskryf word as : $(x_1; f(x_1))$ en $(x_2; f(x_2))$

$\therefore\ \boldsymbol{Gemiddelde\ gradiënt} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\frac{[verskil\ in\ y]}{[verskil\ in\ x]}$

Voorbeeld	Kan jy?
Voorbeeld 1: Bepaal die gemiddelde gradiënt van die grafiek $y = 3x^2 - 4$, tussen $x = -3$ en $x = -1$. **Oplossing:** $Gemiddelde\ \ gradiënt = \frac{f(-3) - f(-1)}{-3 - (-1)} = \frac{23 - (-1)}{-2} = \frac{24}{-2} = -12$	**Kan jy?** Die gemiddelde gradiënt van die grafiek $y = 5x^2 - 4$ bepaal, tussen: 1. $x = 1$ en $x = 3$ 2. $x = -4$ en $x = -1$ 3. $x = 2$ en $x = 3$

Veronderstel dat: $x_1 = a$ en $x_2 = a + h$, waar h die afstand tussen die x- koördinate van die twee punte is. Dan is $f(x_1) = f(a)$ en $f(x_2) = f(a + h)$

$\therefore\ Gem.\ gradiënt = \frac{f(a+h) - f(a)}{\boldsymbol{a} + h - \boldsymbol{a}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $\therefore\ Gem.\ gradiënt = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ is gemiddelde gradiënt tussen enige punte $(a; f(a))$ en $(a + h; f(a + h))$ waar h die afstand tussen die x- koördinate van die twee punte is. Dus is, $Gem.\ gradient = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Afgeleide: Die afgeleide van 'n funksie dui die gradiënt/helling van die funksie by enige punt.

Regterkant lees as volg, "die limiet van die gemiddelde gradient soos h na 0" neig.

Definisie van 'n afgeleide: Afgeleide van die funksie $f(x)$ word gedefinieër as , $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Linkerkant lees as volg, afgeleide van funksie van f

Note: lim is die afkorting vir die notasie vir die limiet.

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, dit verteenwoordig die gradiënt by 'n punt waar $x = a$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, dit verteenwoordig die gradiënt by 'n punt waar $x = 1$

Die afgeleide of gradiënt by enige punt van 'n funksie kan bepaal word deur eerste beginsels of differensiasiereëls.

As jy gevra word om die afgeleide te bepaal vanaf eerste beginsels dan **moet** jy die volgende formule:

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Voorbeeld 2

Bepaal $f'(x)$ vanaf eerste beginsels as $f(x) = 2x^2$.

Oplossing:

$f(x) = 2x^2$

$f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2(x^2+2xh+h^2) = 2x^2+4xh+2h^2$

$\boldsymbol{f(x+h)-f(x)} = 2x^2+4xh+2h^2-2x^2 = \boldsymbol{4xh+2h^2}$

Brei uit en vereenvoudig

Vervang $f(x+h)-f(x)$ in die formule

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+h)-f(x)}}{h}$$

Formule

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{4xh+2h^2}}{h}$$

Vervang: $f(x+h)-f(x) = 4xh+2h^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x+2h)}{h}$$

Ons faktoriseer om onslae te raak van die h in die noemer

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 4x+2h$$

$$f'(x) = 4x+2(0)$$

$$f'(x) = 4x$$

Nadat jy vereenvoudig het, vervang jy h met 0. Die limiet teken word nou weggelaat.

KAN JY?.

A. Eerste beginsels gebruik om die afgeleide van f te bepaal as,

1. $f(x) = x^2+3$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = -2x^2$
4. $f(x) = -3x$
5. $f(x) = \frac{2}{x}$

Voorbeeld 3:

(a) Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = x^2 - 5x$ vanaf eerste beginsels

Oplossing:

$f(x) = x^2 - 5x$

$f(\boldsymbol{x+h}) = (\boldsymbol{x+h})^2 - 5(\boldsymbol{x+h}) = x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h$

$\boldsymbol{f(x+h) - f(x)} = \left(x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h\right) - (x^2 - 5x) = \boldsymbol{2xh + h^2 - 5h}$

Brei uit en vereenvoudig

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f(x+h) - f(x)}}{h}$$

Formule

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{2xh + h^2 - 5h}}{h}$$

Vervang $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 - 5h$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x + h - 5)}{h}$$

Ons faktoriseer nou om vir h in the noemer te illimineer

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 2x + h - 5$$

Sodra dit vereenvoudig is, vervang h. Die limieteken verval hier

$$f'(x) = 2x + 0 - 5$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

b) Bepaal vervolgens die gradiënt van die raaklyn by $x = -1$.

$m = f'(x)$ at $x = -1$.

$f'(x) = 2x - 5$

$f'(-1) = 2(-1) - 5$

$f'(-1) = -7$

Om die afgeleide by 'n punt te kry – stel die x waarde in die afgeleide vergeyking.

B. Die funksies gedefinieër deur die volgende vergelykings word gegee :

- $y = 3x$
- $y = 5$
- $y = -2x$

1. Skryf die gradiënte van elk van die funksies neer.
2. Gebruik eerste beginsels om die afgeleide van elk van hierdie funksies te bepaal.
3. Vergelyk jou antwoorde van 1 en 2. Kan jy verduidelik wat jy vind?

C. As $g(x) = x^2 - 2$, bepaal:

1. Gemiddelde gradiënt tussen $x = -3$ and $x = -1$.
2. $g'(x)$ vanaf eerste beginsels.
3. g'(-2)
4. Die gradiënt van die raaklyn by $x = -2$.

Differensiasie reëls

Die Magsreël Stelling:

As $f(x) = ax^n$ dan is $f'(x) = anx^{n-1}$

Ons vermenigvuldig die koëffisiënt van x met die eksponent en verminder die eksponent met 1.

Daar is verskillende notasies vir die afgeleide

Notasie vir die afgeleide	**Ons differensieer , b.t x**	Voorbeeld 4
$f'(x)$	Vind $f'(x)$ if $f(x) = x^4$	$f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$
y'	Vind y' if $y = x^{-1}$	$y = x^{-1}$ $y' = -x^{-2}$
$\frac{dy}{dx}$	Vind $\frac{dy}{dx}$ if $y = 2x^3$	$y = 2x^3$ $\frac{dy}{dx} = 6x^2$
$\frac{d}{dx}$	Vind $\frac{d}{dx}[2x]$	$\frac{d}{dx}[2x^1] = 2x^0 = 2$
$D_x[f(x)]$	Vind $D_x[-2x^{-4}]$	$D_x[-2x^{-4}] = 8x^{-5}$

Vermenigvuldig die eksponent met die koëffisiënt van x.

x^4 het 'n Eksponent van 4 en koëffisiënt is 1

$\therefore 4 \times 1 = 4$

Neem asseblief kennis:

1 minder as -4 is -5
of
$\mathbf{-4 - 1 = -5}$

Belangrike notas:

- $D_x[x] = \mathbf{1}$
- **Die afgeleide van 'n konstante is 0.**

Kan jy?

1. Vind $\frac{dy}{dx}$ as $y = 3x^{\frac{3}{4}}$
2. Vind $\frac{d}{dx}[4x^{-3}]$
4. Vind y' as $y = \frac{x^3}{2}$

Ons kan hierdie reël op individuele terme van 'n funksie toepas.

Voorbeeld 5

Bepaal :

$$f'(x) \ if \ f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{4}{x^3}$$

- Verwyder wortelvorm
- Skryf die breuk oor

Oplossing:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-3}$$

Pas reel toe by elke term.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 12x^{-4}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{12}{x^4}$$

Antwoord met positiewe eksponent

Voorbeeld 6

Bepaal:

$$D_x\left[\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2\right]$$

Verwyder hakies en vereenvoudig

Oplossing:

$$D_x\left[\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2\right]$$

$$= D_x\left[\left(x^4 + 2(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{\ldots}\right)\right]$$

$$= D_x[x^4 + 2 + x^{-4}] =$$

$$= 4x^3 - \frac{4}{x^5}$$

Skryf elke term sodat daar geen x in die noemer is nie

Antwoord met positiewe Eksponent

Voordat jy reel toepas maak seker dat jy:

- Alle hakies verwyder
- Vereenvoudig breuke deur faktorisering of kanselering
- Skryf uitdrukking sonder wortelvorme.
- Skryf elke term sodat daar nie n x in die noemer is nie : $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Kan jy?

1. Bepaal:

(b) $D_x\left[\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right]$

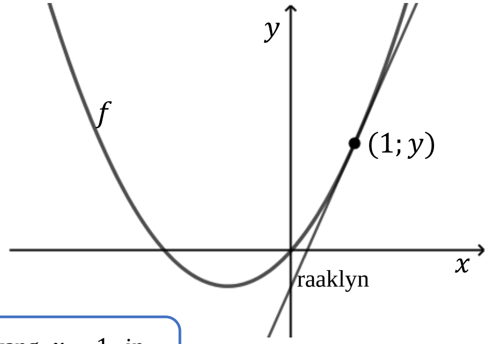
2. Bepaal $f'(x)$ in die volgende

(a) $f(x) = (3x + 2)(x - 4)$

(b) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Die vergelyking van die raaklyn by 'n punt van 'n funksie

Dit is nou maklik om die vergelyking van die raaklyn te vind.



Voorbeeld 7

As $y = x^2 + 2x$, bepaal die vergelyking van die raaklyn by $x = 1$.

Oplossing:

$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

$m_{raaklyn} = 2(1) + 2 = 2 + 2 = 4$

Vervang $x = 1$ in die afgeleide

Ons benodig die koördinate van die punt

$\therefore y = (1)^2 + 2(1) = 3$ Punt $(1; 3)$

Vervang, $x = 1$, in die funksie

Vergelyking van raaklyn: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Vergelyking van raaklyn: $y - 3 = 4(x - 1)$

$y = 4x - 4 + 3$

$y = 4x - 1$

Vervang m en punt in

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Voorbeeld 8

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die funksie $f(x) = x^3 + 2x + 4$

By die punt waar $x = -1$

Oplossing:

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

Stap 1: Afgeleide

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2$

$= 3 + 2 = 5$

$m = 5$

Stap 2: m by die punt:
Stel $x -$ waarde in $f'(x)$

Koördinate van die punt:

$f(-1) = -1 - 2 + 4 = 1$

Koördinate $(-1; 1)$

Stap 3: Koördinate van die punt:
Vervang in $f(x)$

Belangrike nota

- 'n Raaklyn is 'n lyn wat die funksie raak op 'n punt.
- Die gradient van die raaklyn by die kontakpunt is die afgeleide.
- Die vergelyking van 'n lyn is:

$$y = mx + c$$

of

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Vergelyking van die raaklyn:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 5(x + 1)$

$y = 5x + 5 + 1$

$y = 5x + 6$

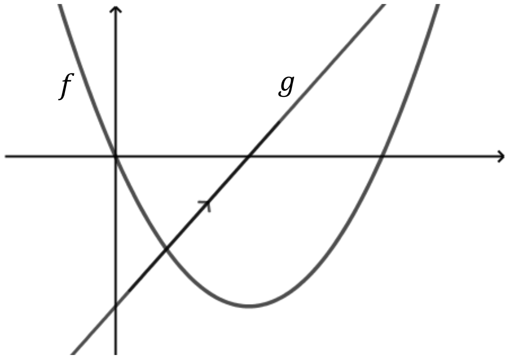
Die vergelyking van die raaklyn by, $x = -1$, is:

$y = 5x + 6$

Stap 4: Vervang m en punt in
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Voorbeeld 3

Vind die vergelyking van die raaklyn aan $f(x) = x^2 - 4x$, paralel aan $g(x) = 2x - 4$



Oplossing:

$f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4$

Raaklyn is paralel aan $g(x)$

// lyne
Gradiente gelyk

$\therefore 2x - 4 = 2$

$2x = 6$

$x = 3$

Punt van kontak

Die kontak punt is dus : $(3; y)$

$f(3) = (3)^2 - 4(3) = 9 - 12 = -3$

Punt $(3; -3)$

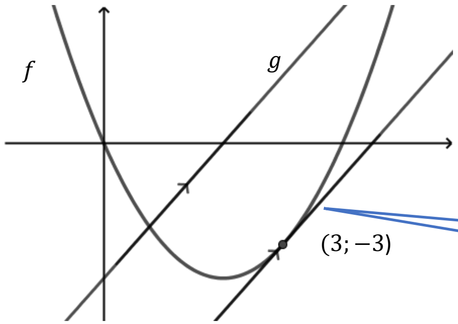
Vergelyking van raaklyn:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 3 = 2(x - 3)$

$y = 2x - 6 - 3$

$y = 2x - 9$



raaklyn

Kan jy?

1. Bepaal die vergelyking van die raaklyn by:
   (a) $y = 2\sqrt{x}$ at $x = 9$
   (b) $y = \dfrac{9}{x}$ at $x = 1$
   (c) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ at $x = 2$
   (d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3}{x}$ by $x = -1$
2. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe $f(x) = -x^2 + 3x$ wat paralel is aan die lyn $y = x + 2$
3. Bepaal die waarde van p as $y = p - 9x$ die raaklyn aan $y = -x^3 + 3x - 2$.
4. Bepaal die waarde van t as die lyn $y + 2x = t$ 'n raaklyn aan $f(x) = 5 + 4x - x^2$.
5. Die grafiek van $f(x) = x^2 + 6$ het 'n raaklyn by $x = a$. Die raaklyn gaan deur die punt $(2; 1)$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn.

Voorbeeld 4:

Bepaal die vergelyking van die raaklyn by die draaipunt van $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.

Oplossing:

$f(x) = -2(x^2 - 2x + 1) + 3$

$f(x) = -2x^2 + 4x - 2 + 3$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

$f'(x) = -4x + 4$

Die kontakpunt is die draaipunt met koördinate $(1;3)$

$\therefore f'(1) = -4(1) + 4$

$f'(x) = 0$

Vergelyking van raaklyn:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 0(x - 1)$

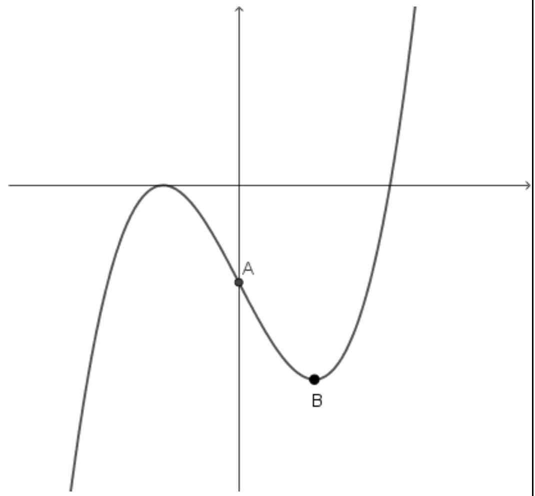
$y - 3 = 0$

$y = 3$

Let op dat die gradiënt van die raaklyn by die draaipunt van 'n funksie 0 is.

Met ander woorde, **die afgeleide by die draaipunt van 'n funksie is 0.**

6. Hieronder is die skets van:
   $f(x) = x^3 - 3x - 2$



(a) Skryf die koördinate van A neer.
(b) Bepaal die afgeleide by A.
(c) Skryf die afgeleide by B neer.
(d) Vervolgens, bepaal die koördinate van B.

AKTIWITEITE / ASSESSERING

Onderwerp	Mind Action Series	Platinum	Wiskunde in die klaskamer	Everything Mathematics
Gem. gradiënt	Oef: 2; bl. 166	Oef: 2&3; bl. 137; 140	Oef: 8.1; bl. 189	Oef: 6.2; bl. 218
Eerste beginsels	Oef: 3; bl. 171	Oef: 4 & 5 ; bl. 145	Oef: 8.4; bl. 199	Oef: 6.3; bl. 220
Differensiaalreels	Oef 4; bl. 177	Oef 6; bl.179	Oef 8.6; bl. 204	Oef: 6 – 4 bl. 223
Vergelykings van raaklyne	Oef 9; bl. 197	Oef 8; bl. 153	Oef 8.7; bl. 207	Oef: 6 – 5 bl. 228

KONSOLIDASIE

- Die afgeleide van die eerste beginsels is baie belangrik. Die formule is op die formuleblad.
- Die afgeleide van 'n funksie is die **gradiënt** van die funksie by 'n punt.
- Die afgeleide van 'n konstante is 0. π is 'n konstante dus is, $D_x[\pi] = 0$
- Ons benodig m en 'n punt om die vergelyking van 'n lyn te bepaal.
- Die afgeleide is die gradiënt (m) van die raaklyn van 'n funksie by 'n punt.
- Die afgeleide by 'n draaipunt is gelyk aan 0.