VAK EN GRAAD	WISKUNDE GR 12	
KWARTAAL 2	Week 5	
ONDERWERP	Derdegraadse/ Kubiese Funksie	
DOEL VAN DIE LES	• Teken die Kubiese funksie • Bepaling van die vergelyking van ‘n Kubiese funksie	
BRONNE	Papiergebaseerde bronne	Digitale bronne
	Blaai asseblief na die afdeling oor Differentiaalrekene en gaan no die afdeling oor Derdegraadse/Kubiese funksie in julle Wiskunde Handboek. Mind The Gap: Bladsy 132	https://www.youtube.com/watch?v=XdVDYCwD6lM https://www.youtube.com/watch?v=3TJLOCYrTes https://youtu.be/8TaDfMpCshE

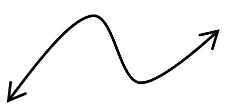
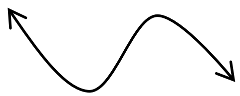
INLEIDING: Liewe Graad 12-leerder sorg dat jy die week 2-les deurgewerk het waar jy geleer het hoe om 'n kubieke funksie te faktoriseer, asook die week 4-les waar jy kennis gemaak het oor die bepaling van die afgeleide van 'n funksie. Dit is die graad 12 voorkennis nodig in hierdie les.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Die standaard vorm van die kubiese funksie is $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Vorm:

Die waarde van “a” beinvloed die vorm van die grafiek.

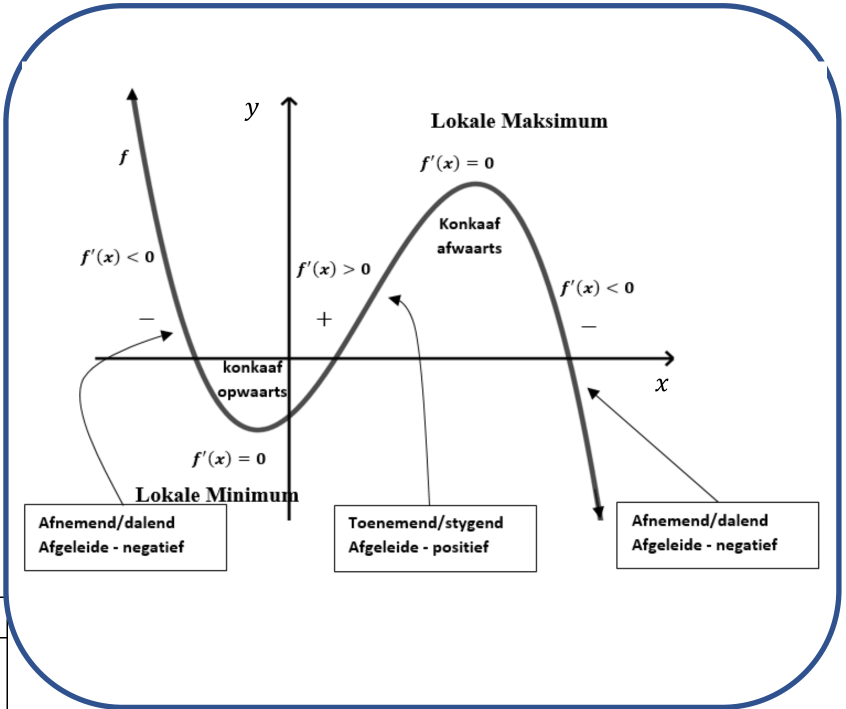
As $a > 0$ [positiewe waarde]	As $a < 0$ [negatiewe waarde]
	

2. Afsnitte : Punte waar die grafiek die asse sny

x –afsnit	y –afsnit
Laat, $y = 0$, en los op vir x deur die faktor stelling.	Laat, $x = 0$, en los op vir y.

3. Draaipunte,word nou verwys as STASIONÊRE PUNTE

$x-$ koördinaat van stasionêre punt	$y-$ koördinaat van stasionêre punt
Bepaal $f'(x)$ en los op vir x as $f'(x) = 0$	Vervang die x- koördinaat van stasionêre punt in die oorspronklike funksie en los op vir y.



Om die kubiese funksie te skets, moet jy 1 tot 3 hierbo bepaal.

STYGENDE/DALENDE:

‘n Funksie is **stygend** as die x-waardes toeneem en die y-waardes **toeneem**.	‘n Funksie is **dalend** as die x-waardes toeneem en die y-waardes **afneem**.
As $f'(x) > 0$, dan is die funksie **stygend**	As $f'(x) < 0$, dan is die funksie **dalend**

Onthou dat, $f'(x)$, is die afgeleide van $f(x)$.
Word ook verwys as die eerste afgeleide.

KONKAWITEIT:

As $f''(x)` > 0$, dan is die funksie konkaaf na bo.	As $f''(x) < 0$, dan is die funksie **konkaaf na onder.**

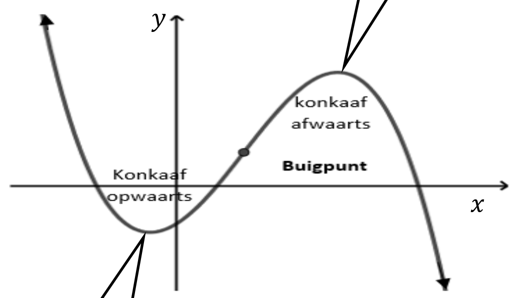
$f''(x)$: word verwys as die tweede afgeleide.
$f''(x)$: word verkry deur die afgeleide van, $f'(x)$ te bereken.

BUIGPUNT / INFLEKSIE PUNT

Die Buigpunt is die punt waar die grafiek van konkaaf na bo na konkaaf na onder verander en omgekeerd.
Om die buigpunt van ‘n kubiese funksie te bepaal, benodig jy die x- koördinaat en die y- koördinaat van die punt.

$x-$ **koördinaat** van buigpunt	$y-$ **koördinaat** van buigpunt
$f''(x) = 0$ en los op vir x	Vervang nou die x- koördinaat van die buigpunt in die oorspronklike funksie en los op vir y.

$f''(x) < 0$
negatief



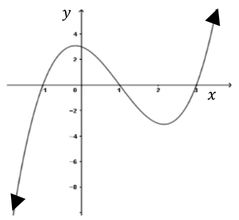
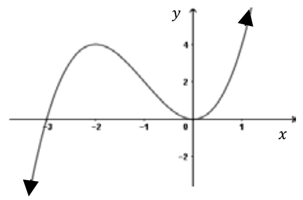
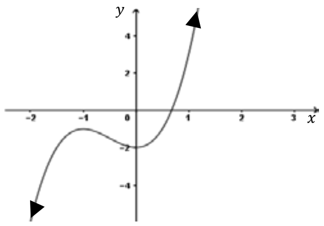
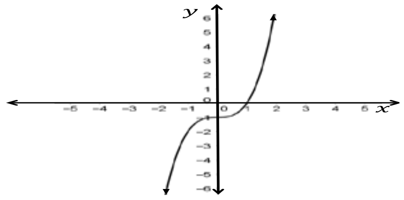
$f''(x) > 0$
positief

Om **aan te toon dat by**, “$x = a$”, waar, $f''(a) = 0$, ‘n buigpunt is, gaan voort soos volg:

Neem,’n getal aan die regterkant van “a”, sê “$a + 1$”, en bepaal of, $f''(a+1) > 0$ (positief) of $f''(a+1) < 0$ (negatief) is.
Neem,’n getal aan die linkerkant van “a”, sê “ $a - 1$ ”, en bepaal of , $f''(a-1) > 0$(positief) of $f''(a-1) < 0$ (negatief) is.
As die teken van, $f''(a+1)$ en $f''(a-1)$ verskillend is, kan ons aflei dat die konkawiteit van die funksie verander by, “$x = a$”, daarom kan ons aflei dat, “$x = a$” , ‘n buigpunt is.

SKETSE VAN KUBIEKE GRAFIEKE

Hieronder is 4 soorte kubieke sketsopsies. Let op vir elke tipe hieronder, waar, “ $a > 0$”. Dieselfde vier soorte kan geteken word waar, “ $a > 0$”.

Tipe 1: $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$	**Tipe 2:** $y = x^3 + 3x^2$	**Tipe 3:** $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$	**Tipe 4:** $y = x^3 - 1$
			
Drie x –afsnitte/ wortels **Twee** draaipunte	**Twee** x –afsnitte/ wortels **Twee** draaipunte **Nota:** Ons het 2 gelyke wortels by $x = 0$	**Een** x –afsnit/ wortel **Twee** draaipunte	**Een** x –afsnit **Een** stasionêre punt (geen draaipunt maar ‘n Buigpunt)

Voorbeeld 1: Gegee: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

a) Skets die grafiek van f **b) Bepaal die $k$oördinate van die buigpunt van f.**

Oplossing:

(a) Vorm:: $a = 2$ dus 

Afsnitte:

$x -$ afsnitte: stel y = 0

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x + 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0$

$(x + 1)(2x - 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \ or \ x = \frac{1}{2} \ or \ x = 3$

Faktor stelling:
Laat $x = -1$:
$f(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 3$
$= -2 - 5 + 4 + 3 = 0$
Dus is $x + 1$ ‘n faktor

Gebruik lang deling of inspeksie om die kwadraties factor te bepaal.

Wortels

Laat $x = 0$:

$y -$ afsnit: $y = 3$

Stasionêre punte: $f'(x) = 0$

$6x^2 - 10x - 4 = 0$

$2(3x^2 - 5x - 2) = 0$

$2(3x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -\frac{1}{3} \quad or \ x = 2$

$y -$ koördinaat van stasionêre punte

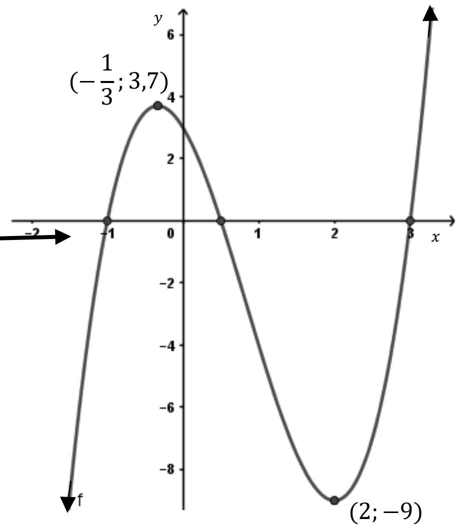
$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$= \frac{100}{27} = 3{,}7$$

$f(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 - 4(2) + 3 = -9$

$\therefore$ Stasionêre punte: $\left(-\frac{1}{3}; 3{,}7\right)$ en $(2; -9)$

Skets



(b) Punt van infleksie/ Buigpunt:

$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$

$f''(x) = 12x - 10$

$f''(x) = 0$

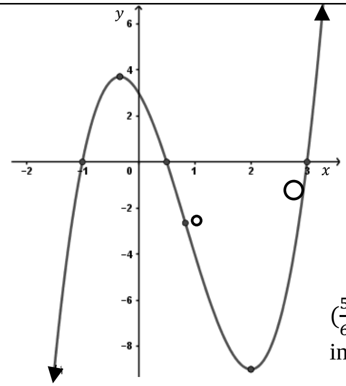
$12x - 10 = 0$

$12x = 10$

$x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

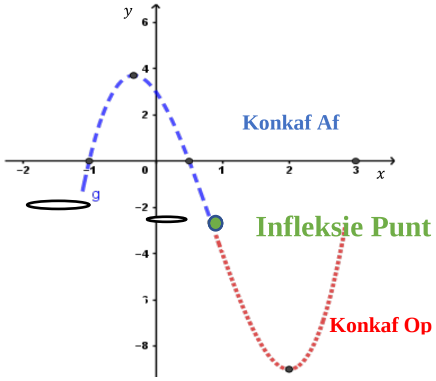
$f\left(\frac{5}{6}\right) = 2\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{5}{6}\right) + 3 = -2{,}6$

$\therefore$ $(\frac{5}{6}; -2{,}6)$ is die infleksie punt



Konkawiteit verander

$(\frac{5}{6}; -2{,}6)$ is die infleksie punt



Voorbeeld 2:

Skets die funksie van $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

Oplossing:

Vorm: $a = -1$ dus

Afsnitte:

$\boldsymbol{x}$ **− afsnitte**: stel, $y = 0$

$-x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$-x(x^2 - 6x + 9) = 0$

$-x(x-3)(x-3) = 0$

$x = 0 \quad or\ x = 3$

$\boldsymbol{y}$ **−afsnit**: stel $x = 0$, dan kry jy

$y = 0$

Stasionêre punte:

$g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$g'(x) = 0$

$-3x^2 + 12x - 9 = 0$

$-3(x^2 - 4x + 3) = 0$

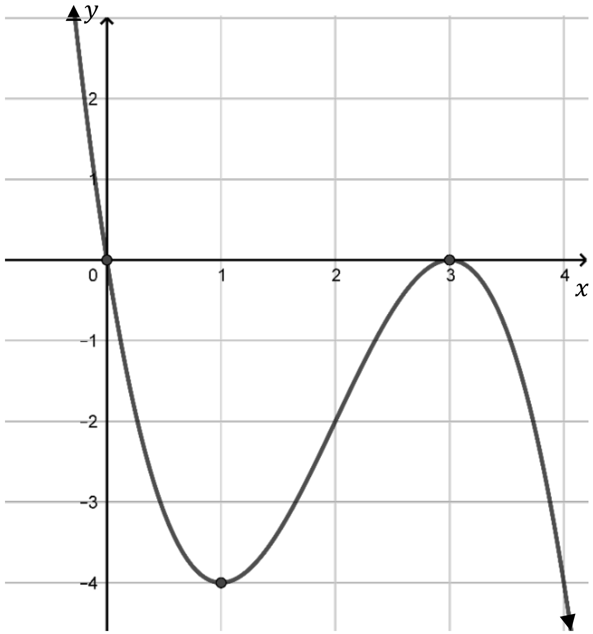
$-3(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3 \quad or\ x = 1$

$\boldsymbol{y}$ **− koördinaat van stasionêre punt :**

$g(3) = -(3)^3 + 6(3)^2 - 9(3) = 0$

$g(1) = -(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) = -4$



$\therefore$ Koördinate van stasionêre punte: $(3; 0)$ en $(1; -4$

KAN JY?

Skets die volgende kubiese funksies:
[Toon alle afsnitte en stasionêre punte]

(a) $y = x^3 + 14x^2 - 49x + 36$

(b) $y = x^3 - 5x - 8x + 12$

(c) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

(d) $y = x(x-1)(x+1)$

Bepaling van die vergelyking van 'n Kubiese funksie

Gegee drie wortels en nog 'n punt

Gebruik die formula:

$y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ waar $r_1\,; r_2$ en r_3 die wortels is..

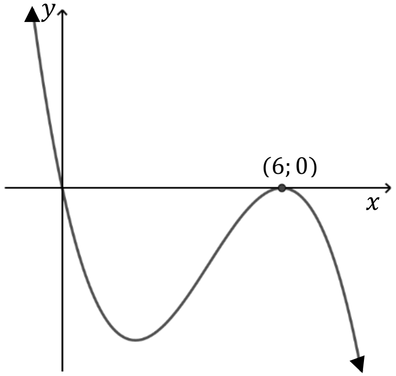
- Vervang die wortels en vereenvoudig sover as moontlik.
- Vervang die ander punt en bepaal die waarde van a.

Voorbeeld 3

Gegee:

$\boldsymbol{f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c}$

en die skets,



(a) **bepaal die waardes van a, b en c.**

(b) **Bepaal die koördinate van A, die lokale minimum van die kurwe.**

Oplossing:

(a) $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

$f(x) = -(x - 0)(x - 6)(x - 6)$

$f(x) = -x(x^2 - 12x + 36)$

$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$\therefore\ a = 12; \quad b = -36 \quad and\ c = 0$

$a = -1$
Wortels: 0; 6; 6
Gelyke wortels by 6

(b) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = -3x^2 + 24 - 36$

$-3x^2 + 24x - 36 = 0$

$-3(x^2 - 8x + 12) = 0$

$-3(x - 6)(x - 2) = 0$

$x = 6 \quad$ or $\quad x = 2$

Die draaipunt by, $x = 6$ was gegee. Die x –koördinaat van A is 2.

y - value at $x = 2$.

$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$f(x) = -(2)^3 + 12(2)^2 - 36(2)$

$\therefore\ \mathbf{A(2; -32)}$

Gegee die draaipunt en twee ander punte

Begin met:

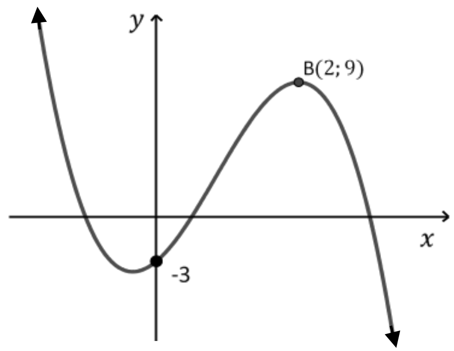
- Afgeleide $=\ 0$, by die draaipunt
- Vervang die ander punt

Voorbeeld 4

Die skets hieronder is gedefinieër deur,

$\boldsymbol{p(x) = ax^3 + 5x^2 + 4x + d}$.

Bepaal die waardes van $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{d}$.



Oplossing:

$y = ax^3 + 5x^2 + 4x + d$

$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 10x + 4$

$\frac{dy}{dx} = 0$

Gradient is nil by die draaipunt

$3ax^2 + 10x + 4 = 0$

$3a(2)^2 + 10(2) + 4 = 0$

x waarde by draaipunt is 2. Vervang in die afgeleide

$12a + 20 + 4 = 0$

$12a = -24$

$a = -2$

$\therefore\ y = -2x^3 + 5x^2 + 4x + d$

Grafiek sny y –as by -3

$d = -3$

$y = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$

Western Cape Government

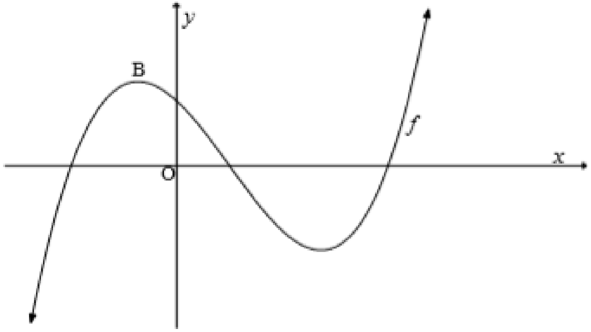
Education

Directorate: Curriculum FET

KAN JY? Vraag van Feb/Maart 2018 – Vraestel 1

VRAAG 9

Die skets hieronder stel die kurwe van $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ voor. Die oplossings van die vergelyking $f(x) = 0$ is -2 ; 1 en 4.



9.1	Bereken die waardes van b, c en d.	(4)
9.2	Bereken die x-koördinaat van B, die maksimum draaipunt van f.	(4)
9.3	Bepaal 'n vergelyking vir die raaklyn aan die grafiek van f by $x = -1$.	(4)
9.4	Skets die grafiek van $f''(x)$ in die ANTWOORDEBOEK. Toon die x- en y-afsnitte duidelik op jou skets aan.	(3)
9.5	Vir watter waarde(s) van x is $f(x)$ konkaaf na bo?	(2) **[17]**

Memo

9.1 $f(x) = (x+2)(x-1)(x-4)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

$b = -3$; $c = -6$; $d = 8$

9.2 $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 6 = 0$

$x = -0{,}73$

Gebruik formula

9.3 $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) - 6 = 3$

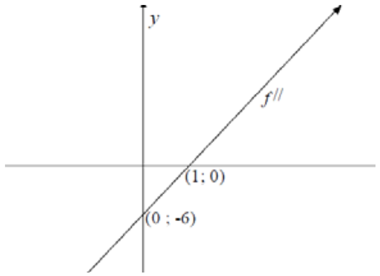
$f(1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 10$

$y - 10 = 3(x+1)$

$y = 3x + 13$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

9.4 $f''(x) = 6x - 6$



9.5 $f''(x) > 0$

$6x - 6 > 0$

$6x > 6$

$x > 1$

AKTIWITEITE/ ASSESSERING	Onderwerp	Mind Action Series	Platinum	Wiskunde vir die Klaskamer	Via Afrika
	Sketse	Oef: 6; Bl: 188	Oef: 11&12; Bl: 162	Oef: 9.1& 9.2; Bl: 216;220	Oef: 11; Bl: 185
	Bepaling van vergelykings	Oef: 7; Bl: 190	Oef: 13 ; Bl: 166	Oef: 9.3; Bl: 1224	Oef: 11; Bl: 224

KONSOLIDASIE

- Onthou volg die stappe met die sketse: Vorm; Afsnitte; Stasionêre punte
- Die **afgeleide** by die stasionêre punt is 0.
- As die konkawiteit om 'n punt waar "$x = a$" verander en $f''(\mathrm{a}) = 0$, dan is, die **punt** waar **"$x = a$"**, die Infleksie punt/buigpunt.