VAK EN GRAAD	Wiskunde GR 12	
KWARTAAL 3	Week 1	
ONDERWERP	Finansies	
DOEL VAN DIE LES	Huidigewaarde-annuïteit	
BRONNE	Papiergebaseerde bronne	Digitale bronne
	Hoofstuk in handbook oor Finansies	https://www.youtube.com/watch?v=M2Iu2iEwaHU&feature=youtu.be https://www.youtube.com/watch?v=VDAAIfjqECc&feature=youtu.be

INLEIDING: Liewe Graad-12 leeder, maak seker dat jy deur die vorige lesse oor annuïteite wat ons bespreek het, werk. Annuïteite is gereelde betalings van ‘n vaste bedrag oor ‘n bepaalde tydperk. Meer spesifiek **toekomstigewaarde-annuïteite**, is ‘n **spaarplan vir die toekoms**. Die toekomstige waarde van die annuïteit is die totale waarde van die spaarplan.

In die les sal ons voortgaan om te leer van annuïteite. **Huidigewaarde- annuïteite is lenings.** Lenings is algemeen in ons lewens. Die meeste mense kan nie ‘n huis of motor bekostig nie en neem ‘n lening uit by ‘n bank of finansiele instelling uit.

Huidigewaarde- annuïteite is ‘n annuïteit waar die doel van die betalings is om die lening terug te betaal. Die **huidigewaarde** van die annuïteit is die **totale leningsbedrag**.

Soos met die toekomstigewaarde-annuïteit formule kan on sook ‘n formule aflei om te bepaal die totale lening beskikbaar, te bepaal.

Die Huidigewaarde-annuïteit formule is gebaseer op die volgende aannames:

- Alle betalings is gelyk.
- Die eerste betaling word na een tydperiode gemaak.
- Die laaste betaling word gemaak by T_n, die tyd wanneer die totaal wat opgeloop het, bereken word.
- Die gereeldheid waarmee die rente saamgestel word, is dieselfde as die gereeldheid waarmee die betalings gemaak word.

Huidigewaarde-annuïteit formule:

$$\underbrace{P_v}_{\textbf{Huidigewaarde}} = \frac{\overbrace{x}^{\textbf{Gereelde paaiement}}\left[1-(1+i)^{-\overbrace{n}^{\textbf{Aantal paaiemente}}}\right]}{\underbrace{i}_{\textbf{Rentekoers}}}$$

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

Voorbeeld 1.
Dawid doen aansoek vir ‘n huislening. Die bank se rentekoers is 11,5% p.j. maandeliks saamgestel. Dawid kan R6 000 per maand bekostig. Die bank bied ‘n lening oor 20 jaar aa eerste paaiement sal gemaak word een maand nadat die lening goedgekeur is.
Bereken die bedrag wat die Dawid kan bekostig tot die naaste rand.

Oplossing:

$x = R\ 5000\ ;\quad i = \frac{0{,}115}{12}\quad ;\ n = 20 \times 12 = 240$

$$P_v = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$P = \frac{5000\left[1-\left(1+\frac{0{,}115}{12}\right)^{-240}\right]}{\frac{0{,}115}{12}}$$

$P = 468\ 854{,}19$

$P = R\ 468\ 854$

Voorbeeld 2.
Dave koop ‘n motor en moet ‘n lening maak ter waarde van R130 000. D bank se rentekoers is 15,5% p.j. maandeliks saamgestel en die leningstyd 4 jaar.
i) Bereken Dave se maandelikse paaiement.
ii) Bereken die totale rente wat Dave moet betaal.

Oplossing:
$P_v = R\ 130\ 000\ ;\quad i = \frac{0{,}155}{12}\quad ;\ n = 4 \times 12 = 48$

i) $P_v = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$$130\ 000 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{-48}\right]}{\frac{0{,}155}{12}}$$

$$x = \frac{130000\times\frac{0{,}155}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}155}{12}\right)^{-48}\right]}$$

$x = R3\ 651{,}03$

ii) Totale terugbetaling $3\ 651{,}03 \times 48 = R175\ 249{,}44$
Rente = Totale terugbetaling – Leningswaarde
= R175 249,44 – R130 000
= R45 249,44

<u>Uitgestelde Betalings</u>: Betalings wat nie dadelik begin wanneer die lening toegestaan is nie. Wanneer ‘n motorhandelaar adverteer, “Koop nou en betaal eers na ses maande”, is die motorhandelaar vrygewig? Dink jy die leningsbedrag sal dieselfde wees na ses maande?
Wanneer die eerste betaling nie in die eerste tydinterval gemaak word nie, sal rente gehef word vir die tyd wat betalings nie gemaak word nie.

Voorbeeld 3.
Op die 1ste Februarie, neem ‘n student ‘n lening uit om sy studies te betaal. Hy kom ooreen om die lening terug te betaal oor ‘n tydperk van 4 jaar deur gelyke maandelikse paaiemente beginnende op die 28ste Februarie die volgende jaar. Die leningsbedrag is R44 000 en die rentekoers is 13% p.j. maandeliks saamgestel.
Bereken die maandelikse paaiement.
Oplossing:
$A = P(1+i)^n$

$A = 44\ 000\left(1+\frac{0{,}13}{12}\right)^{12}$

$A = R50\ 073{,}43$

Die eerste paaiement word nie betaal aan die einde van die eerste maand nie. Saamgestelde rente sal vir 12 maande op die leningsbedrag bereken word wat dan die nuwe leningsbedrag word.

$$P_v = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$50\ 073{,}43 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}13}{12}\right)^{-48}\right]}{\frac{0{,}13}{12}}$$

$$x = \frac{R50\ 073{,}43 \times \frac{0{,}13}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}13}{12}\right)^{-48}\right]}$$

$x = R1\ 343{,}34$ per month

Dit is ‘n lening daarom die Huidigewaarde formule

<u>Uitstaande Balans van ‘n Lening</u>: Die uitstaande balans van ‘n lening, op ‘n bepaalde tydstip, is die bedrag wat betaal moet word om die lening aft e los. Die uitstaande balans word gegee deur die volgende formule:

Uitstaande Balans = Lening met rente tot op datum (Gebruik saamgestelde rente) − Terugbetalings met rente tot op datum (Gebruik toekomstige waarde Formule)

Vir ‘n normale lening, waar die eerste paaiement een interval nadat die lening toegestaan is, gemaak word, en geen paaiemente gemis is nie, word die uitstaande balans onmiddellik na m −de paaiement, gegee deur:

$$OB = P(1+i)^m - \frac{x[(1+i)^m - 1]}{i}$$

Voorbeeld 4.

‘n Lening van R60 000 word afbetaal oor ‘n periode van 6 jaar deur gelyke maandelikse paaiemente teen ‘n rentekoers van 9,5% p.j. maandeliks saamgestel. Bereken die balans uitstaande na die 4 jaar.

Oplossing:
$$P_v = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$60\ 000 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-72}\right]}{\frac{0{,}095}{12}}$$

$x = R1\ 096{,}48$ per month

Eerstens moet ons die maandelikse paaiement bereken sodat ons kan vasstel hoeveel van die lening in 3 jaar terug betaal is

$$OB = P(1+i)^m - \frac{x[(1+i)^m - 1]}{i}$$

$$OB = 60\ 000\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{48} - \frac{1096{,}48\left[\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{48}-1\right]}{\frac{0{,}095}{12}} = R23\ 881{,}03$$

KAN JY?	**Antwoorde:**
1) Jake het 'n lening uitgeneem van R3 000 000 van die bank om sy eie besigheid te begin. Die lening word terrugbetaal oor 15 jaar en die maandelikse betaling begin een maand nadat die lening toegestaan was. Die rentekoers is 9% p.j. maandeliks saamgestel. a) Bereken die waarde van die maandelikse betalings (tot die naaste Rand) b) Bereken die balans van die leningaan die einde van 5 jaar.	1a) R30 428 1b) R2 402 037,83
2) Gary betaal sy huislening van R2 000 000 af, met maandelikse paaiemante, oor 'n periode van 20 jaar. Die rentekoers op die huislening is 10,8% p.j. maandeliks saamgestel. a) Wat is sy maandelikse paaiement? b) Wat is die uitstande balans op die lening na 10 jaar?	2a) R 20 3752,24 2b) R1 491 157,68

Bepaling van die tydperiodes:

Onthou die Logaritmiese wette: **As $x = a^y$ dan is $y = \log_a x$**

$$2^{x-1} = 12$$
$$x - 1 = \log_2 12$$
$$x = \log_2 12 + 1$$
$$x = 4{,}585$$

$$2^{x-1} = 12$$
$$\log 2^{x-1} = \log 12$$
$$(x-1)\log 2 = \log 12$$
$$x - 1 = \frac{\log 12}{\log 2}$$
$$x = \frac{\log 12}{\log 2} + 1$$
$$x = 4{,}585$$

Voeg logs aan beide kante van die vergelyking by en pas die logaritmiese wette

Voorbeeld 5.

John moet 'n lening van R375 000 terugbetaal. Die rentekoers is 12% p.j. maandeliks saamgestel. Hy betaal R7 500 per maand terug.

(a) Hoeveel paaiemente moet John betaal? (b) Wat sal sy laaste paaiement wees.

Oplossing:

a) $$P_v = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$375\ 000 = \frac{7500\left[1-\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{-n}\right]}{\frac{0{,}14}{12}}$$

$$\frac{375\ 000 \times \frac{0{,}12}{12}}{7\ 500} = 1 - \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{-n}$$

$$\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{-n} = 1 - \frac{375\ 000 \times \frac{0{,}12}{12}}{7\ 500}$$

$$\left(\frac{101}{100}\right)^{-n} = \frac{1}{2}$$

b) Bereken die uitstaande balans na die laaste volle paaiement (die 69ste paaiement)

$$OB = P(1+i)^m - \frac{x[(1+i)^m - 1]}{i}$$

$$OB = 375\ 000\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{69} - \frac{7\ 500\left[\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{69} - 1\right]}{\frac{0{,}12}{12}}$$

$$OB = R4\ 914{,}59$$

$$\text{Laaste paaiement} = 4\ 914{,}59 \times \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)$$

$$= R\ 4\ 963{,}74$$

$$-n = \log_{\frac{101}{100}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$n = -\log_{\frac{101}{100}}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \ n = 69{,}661$$ Hy betaal 70 paaiemente

(69 paaiemente van R7 500 en 1 kleiner paaiement)

Delgingsfonds: Wanneer nuwe toerusting gekoop word, moet daar voorsiening gemaak word om hierdie toerusting in die toekoms te vervang. Dit word gedoen deur middel van 'n delgingsfonds of spaarrekening. Om 'n Delgingsfonds te skep, moet die volgende in berekening gebring word.

- Waarvoor die ou toerusting in die toekoms verkoop sal word. (**Waardevermindering**)
- Hoeveel die nuwe toerusting in die toekoms sal kos. (**Inflasie**)
- Die verskil tussen die twee waardes (Inflasie – Waardevermindering) is die **Toekomstige waarde** wat gespaar moet word in die tyd wanneer die toerusting vervang moet word.

Voorbeeld 6.

'n Maatskappy koop 'n trekker vir R1 000 000. Die waarde van die trekker verminder teen 'n koers van 10% p.j. op die verminderde saldo.Die maatskappy wil graag oor 10 jaar 'n nuwe trekker koop. Inflasie word geskat teen 7% p.j. Die ou trekker sal na 10 jaar teen sloopwaarde verkoop word, en die geld verkry uit die verkoop van die ou trekker sal gebruik word om die nuwe trekker aan te koop. 'n Delgingsfonds word geskep om die res van die geld te befonds. Die rentekoers van die delgingsfonds is 9% p.j. maandeliks saamgestel. Die eerste paaiement word onmiddellik gemaak, en die laaste paaiement aan die einde van die 10 jaar. Hoeveel moet die maatskappy maandeliks in die fonds inbetaal.

Oplossing:

Waardevermindering:
$$A = P(1-i)^n$$
$$= 1000\ 000(1-0{,}1)^{10}$$
$$= R\ 348\ 678{,}44$$

Inflasie:
$$A = P(1+i)^n$$
$$= 1\ 0000\ 000(1+0{,}07)^{10}$$
$$= R\ 1\ 967\ 151{,}36$$

Verskil (Toekomstige waarde): R 1 967151 – R 348 678,44 = R 1 618 472,92

Maandelikse paaiement:
$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$1\ 618\ 472{,}92 = \frac{x\left[\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{121} - 1\right]}{\frac{0{,}09}{12}}$$

$$x = \frac{1\ 618472{,}92 \times \frac{0{,}09}{12}}{\left[\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{121} - 1\right]}$$

$$x = R\ 8\ 258{,}96$$

KAN JY?	Antwoorde:
1) Jason moet ‘n lening van R75 000 af betaal. Hy kan R1 500 per maand bekostig. Die rentekoers is 16,2% p.j. maandeliks saamgestel. Hoeveel paaiemente moet hy betaal? 2) ‘n Afrol masjien word gekoop vir R120 000. Die waarde van die toerusting verminder teen 15% p.j. op die verminderde saldo. Die inflasiekoers is 9% p.j. Die ou toerusting sal oor 5 jaar teen skrootwaarde verkoop word. Die opbrengs van die verkoop, saam met die geld in die delgingsfonds, sal gebruik word om ‘n nuwe afrol masjien aan te skaf. a) Bereken die skrootwaarde van die ou afrol masjien na 5 jaar. b) Wat sal die nuwe afrol masjien kos na 5 jaar. c) Vir watter bedrag moet die maatskappy begroot oor 5 jaar. d) Bereken die bedrag van die maandelikse paaiement in ‘n delgingsfonds, wat rente betaal van 12,5% p.j. maandeliks saamgestel, wat sal verseker dat daar genoeg geld is om die afrol masjien oor 5 jaar te vervang. (Die eerste paaiement word onmiddellik gemaak, en die laaste paaiement aan die einde van die 5 jaar.)	1) 84 2). a) R53 244,64 b) R184 634,87 c) R131 390,23 d) R1 552,43

AKTIWITIETE/ASSESSERING	Mind Action Series: Oef 3- Bl 283; Oef 4- Bl 285; Oef 5- Bl 286; Oef 6- Bl 293
	Platinum: Oef 2- Bl 66; Oef 3- Bl 68; Oef 4- Bl 70; Oef 5- Bl 73
	Wiskunde vir die Klaskamer: Oef 4.4 - Bl 102; Oef 4.5 - Bl 108; Oef 4.9 - Bl 118; Oef 4.10- Bl 119
	Siyavula: Oef 3- Bl 283; Oef 6- Bl 293
KONSILIDASIE	• Vir ‘n lening maak gebruik van Huidigewaarde-annuïteits Formule • Let op die voorwaardes vir Huidigewaarde-annuïteits Formule • Lees die vraag versigtig en pas die korrekte formules toe.