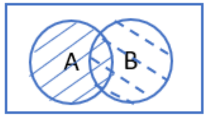
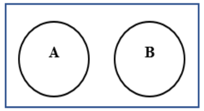
VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 12	
KWARTAAL 3	*Week 4*	
ONDERWERP	Waarskynlikheid: Die telbeginsel	
DOEL VAN LES	• Verduidelik die fundamentele telbeginsel • Pas die fundamentele telbeginsel toe in verskillende probleem kontekse • Gebruik van faktoriale notasie.	
BRONNE	**Papiergebaseerde bronne**	***Digitale bronne***
	Mind the Gap: Eenheid 8; Bladsy 14 Jou Handboek	https://www.youtube.com/watch?v=GB6emV1cHW4 https://www.youtube.com/watch?v=ut61zNQ92dw
INTLEIDING:		

Opsomming van Graad 11 konsepte wat baie belangrik is:

- Die waarskynliksheid identiteit:
  $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$

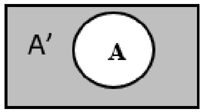


- Twee gebeure is onderling uitsluitend
  as die twee gebeure nie terselfde tyd kan gebeur nie.
  $P(A\ en\ B) = 0$ **[Geen interseksies]**



- Die telreël vir onderling uitsluitende gebeure
  $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$

- **Die komplementêre reël**:
  $P(nie\ A) = P(A') = 1 - P(A)$



- **Afhanklike en Onafhanklike gebeurtenisse**
  Onafhanklike gebeurtenisse – die uitkoms van die tweede gebeurtenis is nie geaffekteer deur die uitkoms van die eerste gebeurtenis nie.
  Die produkreël vir onafhanklike gebeure:: $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$

Notasie

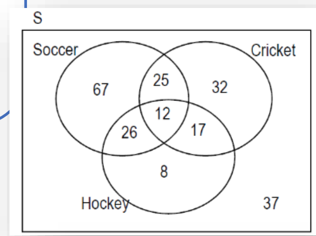
$P(A)$: Waarskynlikheid dat gebeurtenis A sal plaasvind

$P'(A)$: Waarskynlikheid dat gebeurtenis A NIE sal plaasvind nie.

∪: unie/vereniging/ **OF**

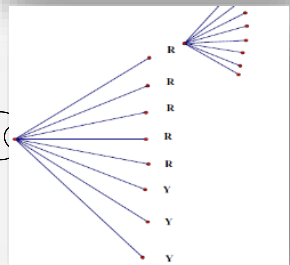
∩: interseksie/ **EN**

$$\boldsymbol{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$



- Gebruik **Venn diagramme** om waarskynlikheids probleme op te los

- Gebruik **boomdiagramme** om die waarskynlikheid van opeenvolgende of gelyktydige gebeure, wat nie noodwendig onafhanklik is nie,, te bepaal.



KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

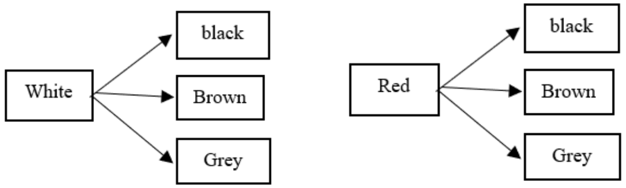
Kom ons kyk na ons eerste probleem:

Hoeveel verskillende uitrustings kan gekombineer word met 'n hemp en 'n broek as jy 2 hemde en 3 broeke het.
Hemde: rooi en blou
Broek: swart, bruin en grys.
Pants: black, brown and grey.

Ons kan 'n diagram gebruik

Ons let op die 2 hemde wat met 3 broeke pas.
Dus: **$2 \times 3 = 6$ moontlike uitkomste**

'n Eenvoudige berekening is nodig :
Totale Keuses = $2 \times 3 = 6$



Oplossing:
Wit swart; Wit / bruin; Wit / grys
Rooi / swart; Rooi / bruin; Rooi / grys
Daarom is daar **6** moontlike uitkomste

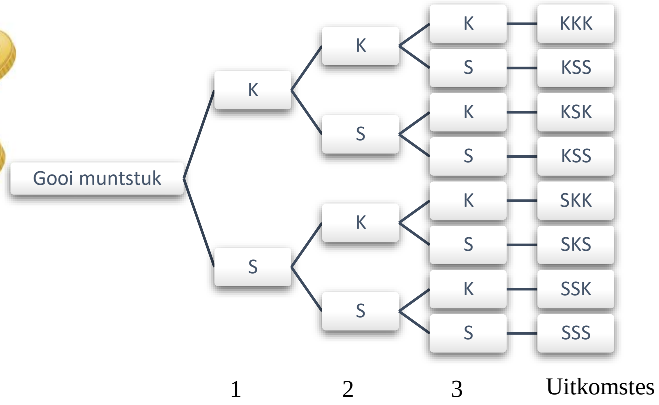
Die Telbeginsel
help u om die moontlike uitkomste te tel sonder om 'n boomdiagram te teken.

Die fundamentele telbeginsel lui dat:
Gestel daar is n maniere om 'n keuse te maak, en vir elkeen van hierdie is daar m maniere om 'n tweede keuse te maak, dan is die aantal moontlike uitkomste gelyk aan $m \times n$ **maniere.**

Kom ons toets hierdie reël:
Ons kan die fundamentele telbeginsel gebruik om die aantal uitkomste te vind wanneer 'n muntstuk drie keer gegooi word.

- Daar is twee maniere om die eerste uitkoms (H of T) te kry.
- Daar is twee maniere om die tweede uitkoms (H of T) te kry.
- Daar is twee maniere om die derde uitkoms te kry (H of T).
- Die aantal moontlike uitkomste wanneer 'n muntstuk drie keer gegooi word is

$$= 2 \times 2 \times 2 = 8$$



Voorbeeld 1:
Die Matriekdanskomitee het op die onderstaande spyskaart besluit vir die Matriekdans vir 2020. 'n Persoon wat die dans bywoon, moet EEN item uit elke kategorie kies; dit is voorgereg, hoofgereg en nagereg.

Spyskaart		
Voorgereg	Hoog Grereg	Nagereg
Gekrummelde sampioene Knoffelbrood vis	Gebraaide hoender Bees Bolognaise Hoenderkerrie Groente kerrie	Roomys Malva Poeding

1. Hoeveel verskillende maaltydkombinasies kan gekies word?
   Oplossing: Voorgereg: 3 keuses; Hoof gereg: 4 keuses; Nagereg: 2 Keuses
   Meal combinations $= 3 \times 4 \times 2 = 24$k
2. 'n Spesifieke persoon wil hoender as hoofgereg hê. Hoeveel verskillende ete-kombinasies het hy?
   Oplossing: Voorgereg: 3 keuses; Hoo gereg: 1 keuse; Nagerag: 2 keuses
   Aantal ete-kombinasies: $3 \times 1 \times 2 = 6$

KAN JY?

1. Jy will graag jou eerste motor koop. Hier is die keuses. choices.
   - Daar is **2** style tipes:
     Sedan of
     Hatchback
     
   - Daar is **5** beskikbaar:
     Rooi; blou;wit; swart; en lig groen
   - Daar is **3** modele:
     GL (standaard model),
     SS (sports model met 'n groter engin)
     SL (luukse model met leer sitplekke)

   Hoeveel keuses het jy altesaam?

Antwoord:

1. 30

Voorbeeld 2: Beskou die woord COVID. Daar word van u verwag om 5 letter word rangskikkings te maak, deur die letters van die woord te gebruik.

1. Die letters mag herhaal word.

____	____	____	____	____
5	5	5	5	5

Aantal: $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

5 spasies om te vul! Letters kan herhaal. Elke posisie kan in 5 maniere gevul word!

2. Die letters mag nie herhaal word nie.

____	4 letters oor	____	____	____
5	4	3	2	1

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Dit staan bekend as 5 faktoriaal!

KAN JY?

2. Iemand moet 'n 5 syfer getal maak met die syfers 1, 3, 5, 7 en 9.
(a) Hoeveel verskillende getalle kan jy maak as daar geen herhaalde syfers is nie?
(b) Hoeveel verskillende getalle kan u maak as herhaalde syfers toegelaat word?
3. 'n Graad 12-leerder het 'n rekeningkunde, fisiese wetenskap en wiskundeboek. Hoeveel verskillende maniere kan dit op die boekrak gerangskik word?

Antwoord:
2. (a) $5^5 = 3125$ (b). $5! = 120$
3. $3! = 6$

Wenk: Gebruik **SHIFT +** x^{-1}

Voorbeeld 3:
Gegee: die syfers $3, 4, 5, 6, 7, 8$ en 9.
Bereken hoeveel unieke 5-syfer getaale gevorm kan word deur die syfers hierbo te gebruik as:
(a) Die syfers kan herhaal
(b) Die syfers nie kan herhaal nie.

7 syfers maar net 5 plekke!

Oplossing:

(a)

7 maniere	7 maniere	7 maniere	7 maniere	7 maniere
Posisie 1	2	3	4	5

(a) $\therefore \mathbf{7^5 = 16\,807}$ ***maniere***

(b)

7 maniere	6 maniere	5 maniere	4 maniere	3 maniere

$\therefore \mathbf{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520}$ ***maniere***

Ons kan dit ook skryf as:

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1}} = 2520$$

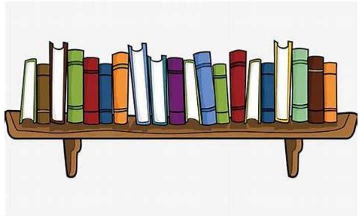
Makliker on die sakrekenaar the gebruik met die tweede metode!

KAN JY?

4. Die nuwe nommerplaat in Gauteng het twee letters (van die alfabet A - Z, maar nie klinkers nie), twee syfers van 0 - 9 en dan nog twee letters (klinkers uitgesluit).
(a) Hoeveel kombinasies kan op hierdie nommerplaat geskep word?
(b) Die vorige nommerplaat in Gauteng het drie letters gehad (uit die alfabet A - Z, maar nie klinkers nie) en dan drie syfers van 0 - 9. Is daar meer kombinasies van die ou of nuwe nommerplate?

Antwoord:
(a) Aantal moontlike kombinasies
$(21 \times 21) \times (10 \times 10) \times (21 \times 21) = 19\,448\,100$.
b) Aantal moontlike kombinasies van die ou nommerplate:
$(21 \times 21 \times 21) \times (10 \times 10 \times 10) = 9\,261\,000$.
Daar is meer kombinasies van die nuwe nommerplaat.

Nou gaan ons kyk wat gebeur as daar groepering is:
Voorbeeld 4:



Twee verskillende Geskiedenisboeke, drie verskillende Geografieboeke en twee Wetenskapboeke word op 'n boekrak geplaas.

(a) Hoeveel maniere kan dit gerangskik word?

(b) Hoeveel maniere kan dit gerangskik word as boeke van dieselfde onderwerp saam geplaas moet word?

(a) Daar is 7 boeke.
Dus kan dit gerangskik word in 7! = 5040 maniere.

(b)

$\underbrace{\boxed{\text{Spasie 1}}\ \boxed{\text{Spasie 2}}}_{\text{GESKIEDENIS}}\ \underbrace{\boxed{\text{Spasie 3}}\ \boxed{\text{Spasie 4}}\ \boxed{\text{Spasie 5}}}_{\text{GEOGRAFIE}}\ \underbrace{\boxed{\text{Spasie 6}}\ \boxed{\text{Spasie 7}}}_{\text{WETENSKAP}}$

Kom ons kyk eers na die groepe.
Die 3 groepe kan in 3! Manière gerangskik word
Geskiedenisboeke kan in 2! maniere gerangskik word.
Aardrykskundeboeke kan in maniere gerangskik word.
Wetenskapboeke in kan 2! Maniere gerangskik word.
Die totale aantal rangskikkings is: $3! \times 2! \times 3! \times 2! = 144$

KANJY?

5. Sewe motors van verskillende vervaardigers, waarvan drie silwer is, moet in 'n reguit lyn geparkeer word.

(a) Op hoeveel verskillende maniere kan AL die motors parkeer?

(b) As die drie silwer motors langs mekaar geparkeer moet word, bepaal op hoeveel maniere die motors geparkeer kan word.

Antwoord:

(a) $7! = 5\,040$

(a) Die drie silver motors kan in 3×2×1 maniere geparkeer word. [Vorm 1 groep]
Dus die groep en die ander 4 motors kan in 5! Maniere geparkeer word.
Daar is $(3!)(5!) = 720$ maniere om die motors te parkeer.

Voorbeeld 5.

'n Wagwoord (password) soos hieronder, bestaan uit ses eenhede. Waar X 'n letter in die alfabet is en Y 'n getal is (van 0 tot 9).

X	X	Y	Y	X	X

(a) Hoeveel wagwoorde kan daar wees?
(b) Hoeveel verskillende wagwoorde kan daar wees as X,Y en Z nie gebruik kan word nie?
(c) Hoeveel verskillende wagwoorde is moontlik as jy enige letter of getal slegs een keer kan gebruik?
(d) Wat is die waarskynlikheid vir 'n wagwoord om met AA te begin?
(e) waarskynlikheid dat 'n wagwoord met 'n K eindig en slegs onewe getalle bevat wat net een keer gebruik kan word.

Oplossing:

X: 26 letters in alfabet
Y: 10 opsies (0-9)

(a) $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 45\ 697\ 600$

(b) $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 23 \times 23 = 27\ 984\ 100$

A: Slegs 1 opsie

(c) $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 24 \times 23 = 32\ 292\ 000$

(d) Aantal moontlikhede om te begin met AA: $1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 67600$

$$P(AA\ aan\ die\ begin) = \frac{P(AA)}{P(total)} = \frac{67\ 600}{45\ 697\ 600} = \frac{1}{676}$$

(e) $26 \times 26 \times 5 \times 4 \times 26 \times 1 = 351\ 520$

Onewe getalle:5

$$P(Eindig\ met\ K\ en\ onewe\ getalle) = \frac{351\ 520}{45\ 687\ 600} = \frac{1}{130}$$

KAN JY?

6. 'n Wagwoord bestaan uit ses verskillende letters in die Engelse alfabet. Elke letter mag slegs een keer gebruik word. Hoeveel wagwoorde kan gevorm word as:
(a) Al die letters van die alfabet gebruik kan word.
(b) Die wagwoord moet met 'n 'D' begin en eindig met 'n 'L'
(c) Bereken die waarskynlikheid dat 'n wagwoord met 'n 'D' begin en met 'n 'L' eindig.

Antwoord:

6. (a) $26 \times 25 \times 24 \times 22 = 7\ 893\ 600$

(b) $1 \times 24 \times 23 \times 22 \times 1 = 12\ 144$

(c) Waarskynlikheid:
$$\frac{12\ 144}{7\ 893\ 600} = \frac{1}{650}$$

AKTIWITEITE/ ASSESSERING	Mind Action Series	Platinum	Clever	Everything Maths (Siyavula)	Classroom Maths
	Oef 1&2: Bl 310-312	Oef 4&5: Bl 124 Oef 11: Bl 135	Oef 13.2-13.4: Bl 361-367	Oef 10.4 : Bl 428 Oef 10.5: Bl 430	Oef 13.2-13.5; Bl 359-365
KONSOLIDASIE	• Lees alle vrae aandagtig deur • Gebruik plekhouers om u te help. • Pas op vir getalle wat nie herhaal nie en oefen voorbeelde van groepering in rangskikkings				