VAK en GRAAD	WISKUNDE GR 12
KWARTAAL 2	Week 7
ONDERWERP	INVERSE FUNKSIES
DOEL VAN LES:	

- Verstaan die definisie van ‘n funksie.
- Leer oor die inverse van die voorgeskrewe funksies: $y = ax + q$; $y = ax^2$
- Leer om inverse funksies te skets en te interpreteer.

BRONNE	***Papier gebaseerde bronne***	***Digitale Bronne***
	Gaan asb. na die hoofstuk oor inverse funksies in jou handboek.	https://youtu.be/2KLSya0iSGA https://youtu.be/ymm7w8WUEIw

INLEIDING:

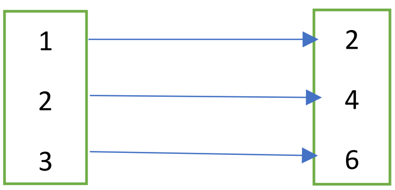
- In grade 10 en 11 het jy geleer hoe om grafieke van verskillende funksies te skets en te interpreteer naamlik: Die reguit lyn: $y = ax + q$; die parabool: $y = a(x-p)^2 + q$; die hiperbool: $y = \frac{a}{x-p} + q$ en die eksponensiële funksie: $y = ab^{x-p} + q$.
- Jy het ook die volgende leer identifiseer vir die bogenoemde funksies: definisieversameling, waardeversameling, afsnitte met die asse, draaipunte, minimum- en maksimumwaarde, asimptote, vorm, simmetrie en die intervalle waar die funksie vermeerder of verminder.
- Jy het ook die effek van a, k, p en q op die grafieke van die funksies veralgemeen.
- Ons gaan nou verder op die kennis bou om te leer oor inverse funksies.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Definisie van ‘n funksie

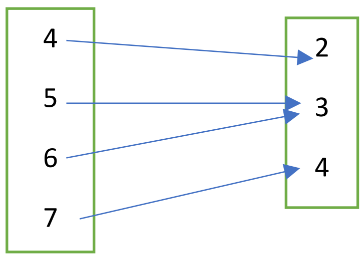
‘n Relasie is enige verwantskap tussen twee veranderlikes. ‘n Funksie is ‘n spesifieke verwantskap sodanig dat: Vir elke x-waarde is daar slegs een y-waarde. Elke element in die definisieversameling (x), word met slegs een element van die waardeversameling (y) geassosieer. Met ander woorde, die x-waardes in ‘n versameling geordende getallepare word nooit herhaal nie.
Beskou die volgende relasies.

Voorbeeld 1: {(1; 2); (2; 4); (3; 6)}
As elke element van die definisieversameling met slegs een waarde in die waardeversameling geassosieer word, is die relasie ‘n **een-tot-een funksie**.



Definisieversameling (x) Waardeversameling(y)

Voorbeeld 2: {(4; 2); (5; 3); (6; 3); (7; 4)} Dié relasie is ‘n **meer-tot-een funksie**. Elke x-waarde word steeds met slegs een y-waarde geassosieer.



Definisieversameling (x) Waardeversameling (y)

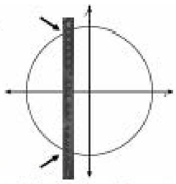
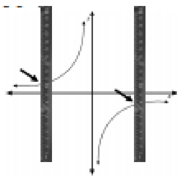
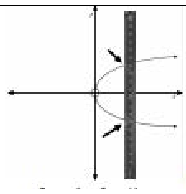
HOE OM TE BEPAAL OF ‘n GRAFIEK ‘n FUNKSIE IS

Die Vertikale en Horisontale Lyn Toetse

Jy kan jou liniaal gebruik om die “**vertikale lyn toets**” op ‘n grafiek toe te pas om te sien of die grafiek ‘n funksie is. Hou ‘n deursigtige liniaal ewewydig aan die y-as, m.a.w. vertikaal en beweeg dit van links na regs oor die grafiek. As die liniaal die grafiek deurgaans slegs op **een** plek, sny dan **is** die grafiek ‘n funksie. As die liniaal op enige stadium die grafiek op meer as een plek sny is die grafiek nie ‘n funksie nie, want dieselfde x-waarde word dan met meer as een y-waarde geassosieer.

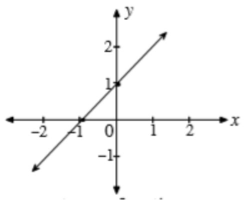
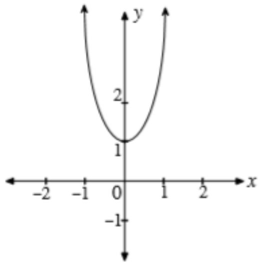
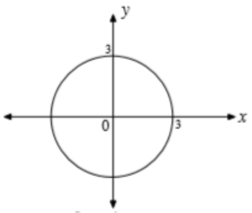
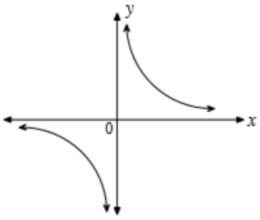
Die “**horisontale lyn toets**” bepaal watter tipe funksie die grafiek is. As die liniaal horisontaal gehou word sodat dit ewewydig is aan die x-as en die liniaal op of af beweeg word, dan is een van die volgende waar: As die liniaal die grafiek deurgaans slegs op een plek sny, is die grafiek ‘n een-tot-een funksie. As die liniaal op enige stadium die grafiek op meer as een plek sny, is die grafiek ‘n meer-tot-een funksie.

Beskou die gege grafieke :

1. 	**Nie ‘n funksie**	2. 	**Funksie**	3 	**Nie ‘n funksie**

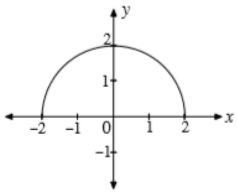
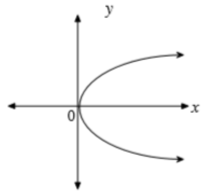
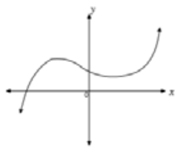
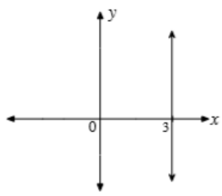
Voorbeeld 3:

Bepaal of die volgende verwantskappe funksies is of nie. As die grafiek’n funksie is bepaal of dit ‘n een-tot-een of meer-tot-een funksie is.

1. een-tot-een funksie 	2. meer-tot-een funksie 
3. nie ‘n funksie nie 	4. een-tot-een funksie 

Kan jy:

Identifiseer of die volgende verwantskappe funksies is of nie? As die grafiek ‘n funksie is bepaal of dit ‘n een-tot-een of meer-tot-een funksie is.

1. 	2. 
 3.	4. 

Antwoord: 1. meer-tot-een-funksie 2. nie ‘n funksie
3. meer-tot-een funksie 4. nie ‘n funksie nie

Funksienotasie:

Aangesien funksies spesiale relasies is gebruik ons spesifieke notasie om dit uit te beeld.

Beskou die funksie: $f = \{(x; y)\ /y = 3x\}$

Hierdie funksie kan voorgestel word deur funksienotasie.

Funksienotasie

$f(x) = 3x$: Dit word gelees as “f van x is gelyk aan $3x$”. Die simbool $f(x)$ word gebruik om die element van die waardeversameling waarop x afbeeld, aan te toon. Dus die y-waardes wat ooreenstem met die x-waardes word gegee deur $f(x)$, m.a.w. $y = f(x)$.

By voorbeeld, as $x = 4$, word die ooreenstemmende y-waarde verkry deur $x = 4$, te vervang in $3x$. Vir $x = 4$ is die ooreenstemmende y-waarde, $f(4) = 3(4) = 12$. Die hakies in die simbool beteken nie f vermenigvuldig met 4 nie. $f(4)$ beteken die y-waarde by $x = 4$.

INVERSES VAN EEN-TOT-EEN LINEêRE FUNKSIES

‘n Inverse van ‘n funksie f, doen die “omgekeerde” van ‘n gegewe funksie f.
f^{-1}, is die notasie vir die inverse van funksie f.

Beskou die funksie $f(x) = 2x - 1$

f is die reël wat die waardes in die definisieversameling (x) gebruik om waardes in die waardeversameling (y) af te beeld. Let wel: $2x - 1 = y$.

As $x = 3$, dan beeld die funksie f hierdie x-waarde af op ‘n ooreenstemmende y-waarde soos volg:

$f(x) = 2x - 1$
$\therefore f(3) = 2(3) - 1$
$\therefore f(3) = 5$
$\therefore y = 5$

So as $x = 3$, dan is $y = 5$.

Die reël wat die proses omkeer en 5 afbeeld op 3, word die inverse van die funksie f genoem en word voorgestel deur f^{-1}.

Metode 1: Inverse funksie deur x en y om te ruil	**Metode 2: Inverse funksie deur vloeidiagramme**
As $y = 2x - 1$ (f) Dan is $x = 2y - 1$ (ruil x en y om) $\therefore -2y = -x - 1$ $\therefore 2y = x + 1$ $\therefore y = \frac{x+1}{2}$ Ons sê dus, die inverse funksie van f is: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ As $x = 5$, vervang word in f^{-1}, dan is $y = \frac{5+1}{2} = 3$. So die reël van f, beeld 3 af op 5 en die inverse (omgekeerde reël) f^{-1} beeld 5 terug na 3.	‘n Vloeidiagram help ook om die konsep van die inverse van ‘n funksie te verstaan: As $f(x) = 2x - 1$, is die vloeidiagram van die funksie $x \rightarrow$ $\boxed{\text{vermenigvuldig met 2}}$ $\rightarrow 2x \rightarrow$ $\boxed{\text{trekaf 1}}$ $\rightarrow 2x - 1$ Die inverse doen die omgekeerde. Jy voer die teenoorgestelde bewerkings uit van agter af na voor. Inverse: $x \rightarrow$ $\boxed{\text{plus 1}}$ $\rightarrow x + 1 \rightarrow$ $\boxed{\text{gedeel deur 2}}$ $\rightarrow \frac{x+1}{2}$ Die inverse funksie van f is, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$
Kan jy self die inverse funksie van $f(x) = -3x + 4$ bepaal soos in **1. Metode 1** **2. Metode 2**	Oplossing: $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{-3}$

Gegee die funksie $f(x)$, ons bepaal die inverse $f^{-1}(x)$ deur:

- Ruil x en y om in die vergelyking
- Maak y die onderwerp van die vergelyking
- Skryf die nuwe vergelyking in funksienotasie.

Voorbeeld 4:

As $f(x) = 2x - 4$

1. Bepaal f^{-1}, die inverse van f.
2. Skets die grafiek van f, f^{-1} en die reguitlyn $y = x$, op dieselfde assestelsel.
3. Bepaal die koördinate van die snypunt en dui dit op jou skets aan.
4. Skryf die definisieversameling en die waardeversameling van f en f^{-1}.

Oplossing:

1. As $y = 2x - 4$ (f)
   Inverse: $x = 2y - 4$ (ruil x en y)
   $\therefore -2y = -x - 4$
   $\therefore 2y = x + 4$
   $\therefore y = \frac{x+4}{2}$

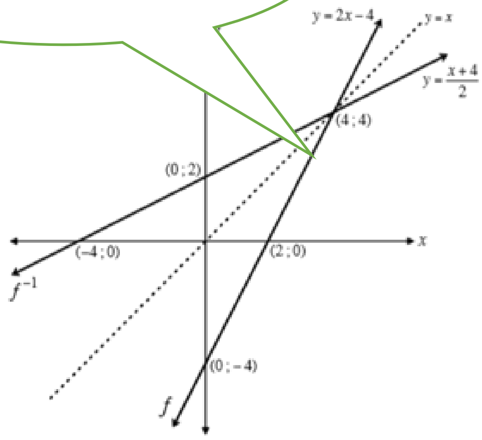
Die inverse funksie van f is:
$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

2.
Skets die funksies:
$y = 2x - 4 \quad (\boldsymbol{f})$
$\boldsymbol{y}$ **– afsnit: laat** $\boldsymbol{x = 0}$
$y = 2(0) - 4 = -4$
$\boldsymbol{x}$ **– afsnit : laat** $\boldsymbol{y = 0}$
$0 = 2x - 4$
$\therefore\ -2x = -4$
$\therefore\ x = 2$

$y = \frac{x+4}{2} \quad (\boldsymbol{f^{-1}})$
$\boldsymbol{y}$ **– afsnit : laat** $\boldsymbol{x = 0}$
$y = \frac{0+4}{2} = 2$
$\boldsymbol{x}$ **– afsnit : laat** $\boldsymbol{y = 0}$
$0 = \dfrac{x+4}{2}$
$\therefore\ x = -4$

Slegs die inverse van ‘n een-tot-een funksie is self ‘n funksie.

Die inverse funksie is simmetries tot die funksie om die lyn $y = x$.



3. Jy kan ook die snypunt van die twee grafieke bepaal deur die vergelyking op te los:

$f(x) = f^{-1}(x)$
$\therefore\ 2x - 4 = \dfrac{x+4}{2}$
$\therefore\ 4x - 8 = x + 4 \qquad$ (LCD = 2)
$\therefore\ 3x = 12$
$\therefore\ \boldsymbol{x = 4}$
$\therefore\ y = 2(4) - 4$
$\therefore\ \boldsymbol{y = 4}$
Die koördinate van die snypunte is (4; 4)

4.
Definisieversameling van f: $x \in R$
Waardeversameling van f: $y \in R$
Definisieversameling van f^{-1}: $x \in R$
Waardeversameling van f^{-1}: $y \in R$

Let op:
Die funksie $f(x) = 2x - 4$ is ‘n een-tot-een lineêre funksie en die inverse $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$ is ook ‘n een-tot-een funksie.

Kan jy:
As $f(x) = -3x + 6$
1. Skryf die vergelyking van die inverse funksie, in die vorm f^{-1}.
2. Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel, asook die lyn $y = x$.
3. Vind die snypunt en dui dit aan op die skets.

Antwoord: 1. $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{-3}$ 3. $(\frac{6}{5} ; 3\frac{3}{5})$

INVERSES VAN MEER-TOT-EEN KWADRATIESE FUNKSIES

Beskou die meer–tot-een funksie $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

Skets: $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ wat ook geskryf kan word as $y = x^2$.
Ons kan ‘n tabel gebruik vir sommige waardes van x:

x	-1	0	1
y	1	0	1

Ruil x en y in $y = x^2$ om, dan is $x = y^2$
Gebruik weer ‘n tabel om $x = y^2$ te skets

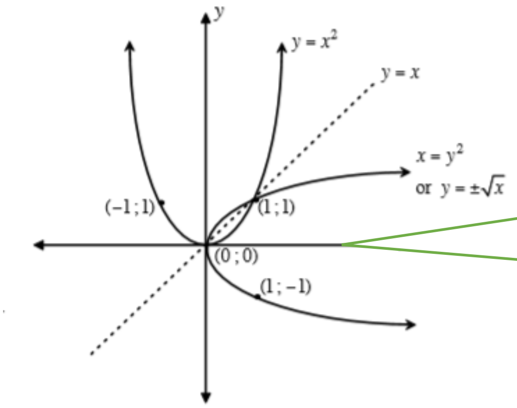
y	-1	0	1
x	1	0	1

Dit is moontlik om y die onderwerp van die formule vir die inverse relasie te maak:

$\therefore y^2 = x$

$\therefore y = \pm\sqrt{x}$ **as** $x \geq 0$

Die grafiek van $y = \pm\sqrt{x}$ is nie 'n funksie nie, want 'n vertikale lyn sal die grafiek by twee punte sny soos dit van links na regs beweeg. Ons sal iets aan die grafiek van $y = x^2$ moet doen sodat wanneer ons die inverse bepaal, die inverse ook 'n funksie is.



Die inverse van 'n parabool is nie 'n funksie nie, want daar is elemente in die definisieversameling waarmee meer as een y-waarde geassosieer word.

MAAR as ons die definisieversameling van die oorspronklike funksie **beperk,** kry ons 'n inverse wat wel 'n funksie is.

Let wel:

As 'n funksie nie 'n een-tot-een funksie is nie sal die inverse ook nie 'n funksie wees nie.

Ons kan egter die definisieversameling van 'n meer-tot-een funksie beperk sodat die inverse ook 'n funksie is, soos hieronder aangetoon word.

Daar is twee verskillende beperkings wat ons op die definisieversameling kan uitoefen sodat die inverse 'n funksie is.

Metode 1

Beperk die definisieversameling van $f(x) = x^2$ soos volg:

$f(x) = x^2$ $waar$ $x \geq 0$

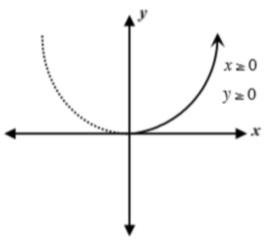
Let op die grafiek van die parabool is een helfte van die oorspronklike parabool waar die x-waardes positief is.

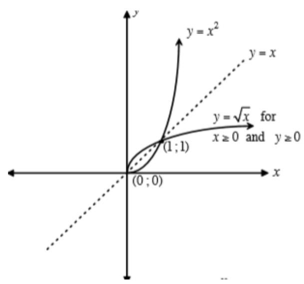
Die waardeversameling van die funksie is dieselfde as die oorspronklike funksie, $y \in [0\ ;\ \infty)$.

Die inverse van die grafiek van die funksie f, is die beeld wanneer f reflekteer word om $y = x$. Sien die skets langsaan.

Die vergelyking van die inverse funksie word gedefinieerd as, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ waar $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Let wel: f en f^{-1} is beide een-tot-een funksies.





Metode 2

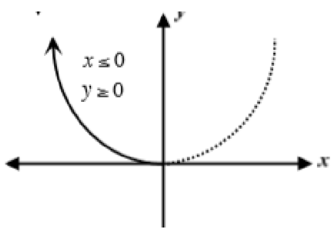
Beperk die definisieversameling van $f(x) = x^2$ soos volg:

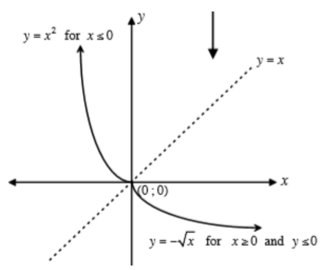
$f(x) = x^2$ $waar$ $x \leq 0$

Let op die grafiek van die parabool is een helfte van die oorspronklike parabool waar die x-waardes negatief is.

Die waardeversameling van die funksie is dieselfde as die oorspronklike funksie, $y \in [0\ ;\ \infty)$.

Die inverse van die grafiek van die funksie f, is die beeld wanneer f reflekteer word om $y = x$. Sien die skets langsaan.





Die vergelyking van die inverse funksie word gedefinieerd as, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, waar $x \geq 0$ en $y \leq 0$
Let wel: f en f^{-1} is beide een-tot-een funksies.

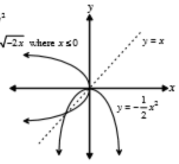
KAN JY:

Gegee: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

1. Skets die grafiek van die funksie en die inverse op dieselfde asse stelsel.
2. Beperk nou die definisieversameling van die oorspronklike funksie op twee verskillende maniere om sodoende nuwe een-tot-een funksie te vorm..
3. Skets die grafiek van die nuwe funksie en die inverse funksie op dieselfde asse stelsel.
4. Vervolgens herskryf die vergelyking van elke inverse funksie in die vorm $f^{-1}(x) =$
5. Skryf neer die definisie en waardeversameling van elke grafiek.

Antwoord:

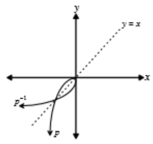
(1) $x = -\frac{1}{2}y^2$
or $y = \pm\sqrt{-2x}$ where $x \leq 0$

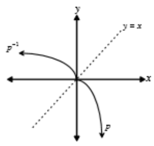


(2) Situation 1: $p(x) = -\frac{1}{2}x^2$ where $x \leq 0$

Situation 2: $p(x) = -\frac{1}{2}x^2$ where $x \geq 0$

(3) Situation 1 Situation 2





(4) Situation 1: $p^{-1}(x) = -\sqrt{-2x}$ where $x \leq 0$ Situation 2: $p^{-1}(x) = -\sqrt{-2x}$ where $x \leq 0$

(5)

	Situation 1		Situation 2	
	Domain of p	$x \in (-\infty\,;0]$	Domain of p:	$x \in [0\,;\infty)$
	Range of p:	$y \in (-\infty\,;0]$	Range of p:	$y \in (-\infty\,;0]$
	Domain of p^{-1}:	$x \in (-\infty\,;0]$	Domain of p^{-1}:	$x \in (-\infty\,;0]$
	Range of p^{-1}:	$x \in (-\infty\,;0]$	Range of p^{-1}:	$y \in [0\,;\infty)$

OEFENINGE: Inverse Funksies
Doen asseblief oefeninge oor INVERSE FUNKSIES vanuit jou Wiskunde handboek.

Siyavula: oef 2-3 bl 61 ; oef 2 – 4 bl 66 ; oef 2-5 bl 68

Mind Action Series Graad 12: oef 2 bl 44 ; oef 3 no 2 bl 45

Wiskunde vir die klaskamer graad 12 : oef 2.4 bl 52 ; oef 2.5 bl 55

Platinum Graad 12: oef 2 bl 40

Konsolidasie:
Jy moet die veskil tussen die notasie van die funksie en die inverse kan uitken, Die standard notasie is $f(x)$ vir die funksie en $f^{-1}(x)$ vir die inverse. Moet nie $f^{-1}(x)$ met $\frac{1}{f(x)}$ (resiprook) verwar nie, dit verteenwoordig nie dieselfde konsep nie.
As jy ‘n funksie f en die inverse funksie f^{-1} grafies aandui, is die twee grafieke simmetries by die lyn $y = x$.
Enige punt op die lyn $y = x$, het x en y koördinate met dieselfde numeriese waardes, daarom maak dit geen verskil om die y en x waardes te verwissel nie.
Let ook op dat slegs een-tot-een funksies se inverse ‘n funksie is. As die funksie nie ‘n een-tot- een funksie is nie moet die definisieversameling so beperk word sodat die grafiek ‘n een-tot-een funksie is. Die inverse oor die beperkte definisieversameling is dan ook ‘n een-tot-een funksie. Die definisieversameling van die funksie is die waardeversameling van die inverse. Die waardevesameling van die funksie is die definisieversameling van die inverse.